J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
39 (1994) 281-330

FORMES DIFFERENTIELLES SUR LES VARIETES DE CONTACT

MICHEL RUMIN

Introduction

La géométrie de contact a connu un regain d'intérêt ces dernières années. De nouvelles théories se sont en effet développées rapidement permettant une investigation de plus en plus poussée de cette géométrie. Il en est ainsi des notions de capacités symplectiques, de courbes pseudoholomorphes et de structure de contact tordues.

D'un point de vue plus élémentaire, cet article s'attache à définir et utiliser des notions de formes différentielles, de laplaciens et de courbure "adaptées" à la géométrie de contact.

Pour préciser ceci, considérons les groupes de Lie les plus "simples" munis d'une structure de contact naturelle: les groupes de Heisenberg. Ils possèdent une famille de dilatations agissant, de façon non isotrope, par des homothéties de rapport λ sur le champ de contact Q et λ^2 suivant le centre T. Celles-ci induisent en particulier des changements de métriques invariantes par translations de $g = g_Q + g_T$ en $g_\lambda = \lambda g_Q + \lambda^2 g_T$ où λ est constant. Nous remarquons, dans la première partie de cet article, que la condition de cofermeture des formes, au sens du complexe de De Rham, n'est pas invariante sous les changements d'échelle λ. Ceci se produit car la différentielle extérieure est un opérateur isotrope, mêlant sans distinction des dérivations suivant Q, de poids un, et transverses de poids deux.

Pour y remédier, nous construisons sur les variétés de contact un complexe de formes différentielles "modulo formes de contact" possédant, lui, la bonne homogénéité. Nous montrons ensuite qu'il est localement exact. Sa cohomologie coïncide alors avec celle de De Rham de la variété.

L'étape classique suivante consiste à étudier les laplaciens issus de ce complexe. Ici, les calculs se compliquent car, contrairement à leurs homologues riemanniens, ces laplaciens ne sont pas scalaires modulo des termes d'ordre inférieur (excepté en dimension 3). De plus, en degrés moitiés, ces

Received June 29, 1992.

opérateurs sont d'ordre 4. Nous montrons malgré tout qu'ils possèdent une régularité analytique: l'hypoellipticité maximale (cf. [5]). Cela nous permet alors de disposer des résultats usuels de représentation harmonique de la cohomologie.

Pierre Julg et Gennadi Kasparov ont utilisé de manière inattendue ce "complexe de contact" et sa jauge hypoelliptique dans leur étude de la K-théorie bivariante du groupe $SU(n, 1)$, voir [6] et [7]. En quelques mots, l'espace symétrique associé à ce groupe, noté H^n se plonge holomorphiquement dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Son bord à l'∞ est alors muni de structures C.R. et de contact induites par l'action de J sur la sphère unité de $\mathbb{C}^n$. Pierre Julg montre que les formes harmoniques L^2 de H^n possèdent une "limite au bord" vivant précisément dans le sous-espace des formes différentielles pris en compte par le complexe de contact. Cette forme étant de plus fermée, le choix d'un "bon" représentant dont elle dérive se fait alors par la condition de jauge hypoelliptique étudiée. Si on note que des sphères concentriques de H^n sont munies d'une famille de métriques explosant asymptotiquemenet à l'∞ comme les g_λ, $\lambda \to \infty$ décrits plus haut, l'utilisation d'une condition de jauge invariante par ces changements d'échelle apparaît finalement assez naturelle.

Décrivons maintenant l'application du complexe de contact proposée en deuxième partie de cet article. Il s'agit de rechercher des conditions d'annulation de la cohomologie en utilisant des formules "à la Weitzenböck", liant les laplaciens issus du complexe de contact avec une connexion et sa courbure.

De nouveau ici, nous commençons par choisir une connexion "adaptée" à la structure de contact, c'est à dire invariante sous les changements de métriques définis ci-dessus. Une telle construction a déjà été développée par Wester, Stanton et Tanaka dans le cadre de la géométrie pseudohermitienne (cf. [8], [12], et [14]). Celle-ci consiste en la donnée d'une forme de contact θ etd'une structure complexe J définie sur le champ de contact Q telle que:

(i) J est intégrable au sens de Frobénius,

(ii) la forme quadratique $g_\theta\colon X \mapsto d\theta(X, JX)$ est définie positive en restriction sur Q. La connexion pseudohermitienne ∇ utilisée est en fait l'unique connexion préservant g_θ, θ, J et dont la forme de torsion est d'un type donné.

Nous pouvons alors énoncer, sur les variétés pseudohermitiennes M de $\dim 2n+1$, des critères d'annulation de $H^k(M, \mathbb{R})$ pour $k \neq n$ et $n+1$ sous une hypothèse de "positivité" de la courbure de ∇. Lorsque $k = 1$, cette condition s'exprime par:

$$(R_2X\,,\,X) > K(n)|(R_1X\,,\,X)| \quad \text{pour tout } X \in Q\,,$$

où R_2 s'assimile au "tenseur de Ricci" de ∇ suivant le champ de contact Q, et $R_1 = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_T J$, désigne la dérivée de Lie de la structure complexe J suivant le champ de Reeb T, transverse, associé à θ.

Il est important de souligner ici que les laplaciens utilisés pour obtenir ces critères sont des opérateurs différentiels de second ordre suivant Q. Les formules de Weitzenböck associées font alors naturellement appel à des éléments de courbure, R_2 et R_1, qui sont des invariants différentiels de g_θ et J, également du second ordre suivant Q.

Je ne sais pas obtenir de critère d'annulation général en degrés n et $n+1$, car les laplaciens de contact mis en jeu sont d'ordre 4. En dimension 3 cependant, on montre, en étudiant une racine carrée du laplacien de contact ainsi que des opérateurs supplémentaires du 3ème ordre, que $H^1(M\,,\,\mathbb{R}) = 0$ si la courbure vérifie la condition de degré 3:

$$\forall X \in Q \text{ de norme } 1, \qquad (R_2X\,,\,X) > K\|R_1\| + K'\|\nabla_Q R_1\|^{2/3}.$$

Nous retrouvons ensuite les cas limites $R_2 > 0 = R_1$ de ces théorèmes d'annulation dans le cadre de la géométrie riemmannienne. En effet, lorsque $R_1 = 0$ le champ T engendre sur M un flot transverse qui respecte la structure pseudohermitienne. Nous nous plaçons sous l'hypothèse que l'espace des orbites de ce flot est une variété N lisse, héritant ainsi d'une structure kählérienne induite. Nous pouvons alors montrer, d'une part, que la cohomologie primitive de N en degré $k \leq n$ s'identifie par relèvement à celle de M, et d'autre part, (pour $k = 1$) que la courbure R_2 se projette bien sur le tenseur de Ricci de la connexion le Levi-Civita de N.

Dans le cas général $R_1 \not\equiv 0$, cette interprétation n'est plus valable. Nous voulons cependant comparer les critères d'annulation obtenus ici avec celui, bien connu en géométrie riemannienne, portant sur la courbure de Ricci de la connexion de Levi-Civita. Pour cela, nous exprimons $\mathrm{Ricci}^{\mathrm{L.C.}}(g_{\lambda\theta})$ en fonction de la courbure pseudohermitienne. En fait, $\mathrm{Ricci}^{\mathrm{L.C.}}(g_{\lambda\theta})$ se développe comme un polynôme en λ dont les coefficients sont des composantes homogènes de la courbure pseudohermitienne. Nous pouvons alors montrer que si il existe λ tel que $\mathrm{Ricci}^{\mathrm{L.C.}}(g_{\lambda\theta}) > 0$ alors $K(R_2X\,,\,X)$ domine $\|R_1\|$, la trace $\mathrm{Tr}_Q(\nabla R_1)X$, ainsi que la composante de poids 4: $((\nabla_T R_1)X\,,\,X)$. Cette condition d'annulation est donc à priori plus contraignante que celles obtenues en géométrie pseudohermitienne.

Enfin, dans un dernier paragraphe, nous exprimons en dimension 3 les équations des géodésiques de Carnot-Carathéodory ainsi que leurs variations à l'aide de la connexion pseudohermitienne. Nous un déduisons un critère de compacité de la variété sous une hypothèse de positivité de la courbure. Cette fois la condition obtenue est de même force, ordre 4, que celle portant sur la courbure de Ricci de la connexion de Levi-Civita.

Ce travail est le résultat d'une thèse, effectuée sous la direction des Professeurs M. Gromov et P. Pansu. Je tiens à les remercier ici vivement pour tous leurs soutien et conseils.

PREMIÈRE PARTIE
UN COMPLEXE DE DE RHAM HOMOGÈNE SUR LES VARIÉTÉS DE CONTACT

1. Groupes de Heisenberg et complexe de De Rham

Commençons par décrire les groupes de Heisenberg. Ils nous serviront de modèle géométrique local dans toute la suite.

On appelle groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$, le groupe de Lie H_{2n+1} dont l'algèbre de Lie est engendrée par X_i, Y_i pour $1 \leq i \leq n$, et T avec les relations $[Y_i, X_i] = T$ pour $1 \leq i \leq n$, les autres crochets étant nuls.

On considère le sous fibré en hyperplans $Q \in TH_{2n+1}$ engendrés par les X_i, Y_i et notons θ la 1-forme telle que $\theta_{\lceil Q} = 0$ et $\theta(T) = 1$. On vérifie que $d\theta_{\lceil Q}$ est une forme symplectique. Q s'appelle alors une structure de contact sur H_{2n+1}, la forme θ partout non nulle étant une forme de contact associée.

On munit dans la suite H_{2n+1} de la métrique riemannienne invariante par translation telle que la famille $\{X_i, Y_i, T\}$ soit orthonormée, et on y considère le complexe de De Rham des formes différentielles, ainsi que son adjoint pour la métrique choisie. Il y a sur H_{2n+1} une famille $\{h_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ d'automorphismes de groupe agissant au niveau de l'algèbre de Lie comme des homothéties de rapport λ sur Q et λ^2 suivant T.

Nous allons voir que le complexe de Rham n'a pas la bonne homogénéité par rapport à ces dilatations naturelles de H_{2n+1}. En effet, soit α une 1-forme cofermée de H_{2n+1}. Cela signifie en notant δ l'opérateur de codifférentiation que $\delta\alpha = 0$, i.e.,

$$\delta\alpha = \sum_{i=1}^{n} (X_i.\alpha(X_i) + Y_i.\alpha(Y_i)) + T.\alpha(T) = 0.$$

(*Remarque.* L'expression ci-dessus pour δ est correcte car X_i, Y_i et T engendrent des géodésiques comme nous le verrons plus loin.) Cependant, les 1-formes $h_\lambda^*\alpha$ "homothétiques" de α ne sont plus cofermées en général car nous avons:

$$\delta(h_\lambda^*\alpha) = \lambda.\sum_{i=1}^{n}(X_i.\alpha(X_i) + Y_i.\alpha(Y_i)) + \lambda^2 T.\alpha(T).$$

En quelque sorte, la composante en T de α rompt l'homogénéité de δ.

On considère ensuite une fonction f sur H_{2n+1} telle que $df_{\restriction Q} = 0$. Comme $[X_1, Y_1] = T$ on trouve que: $T.f = 0$, et finalement f est constante. Par conséquent, nous n'avons pas besoin de connaître la composante en T de df.

La recherche d'une condition de jauge homogène nous conduit donc à définir un complexe de formes différentielles qui travaille "modulo θ" (et par conséquent aussi "modulo $d\theta$").

2. Description du complexe de contact

Soit M une variété de dimension $2n+1$ munie d'une structure de contact; c'est à dire d'un sous fibré en hyperplans Q de TM tel qu'il existe une 1-forme θ définie sur M avec: $\ker\theta = Q$, et $d\theta_{\restriction Q}$ non dégénérée. Une telle forme s'appelle forme de contact.

Posons Ω^* l'algèbre graduée des formes différentielles sur M. On note $\mathscr{I}^*$ l'idéal différentiel engendré par θ, soit:

$$\mathscr{I}^* = \{\theta\wedge\beta + d\theta\wedge\gamma | \beta, \gamma\in\Omega^*\}.$$

Soit $\mathscr{J}^*$ l'annulateur de $\mathscr{I}^*$, c'est à dire:

$$\mathscr{J}^* = \{\alpha\in\Omega^* | \theta\wedge\alpha = d\theta\wedge\alpha = 0\}.$$

$\mathscr{I}^*$ et $\mathscr{J}^*$ sont clairement indépendants de la forme de contact θ choisie (i.e., en remplacant θ par $f\theta$) et stables par la différentielle extérieure d. On considère alors les complexes induits par le complexe de De Rham sur $\Omega^*/\mathscr{I}^*$ et $\mathscr{J}^*$. Notons d_Q les opérateurs de différentiation induits par d.

Comme $d\theta_{\restriction Q}$ est une forme symplectique, on sait par un lemme d'algèbre bien connu en géométrie kählérienne (cf. Weil [15]) que l'application:

$$L: \Lambda^k Q^* \to \Lambda^{k+2} Q^*$$

de multiplication extérieure par $d\theta$ est injective pour $k \leq n-1$ et surjective pour $k \geq n-1$. Il en résulte que $\Omega^k/\mathscr{I}^k = \{0\}$ pour $k \geq n+1$

et $\mathcal{J}^k = \{0\}$ pour $k \leq n$, c'est à dire que nos deux complexes induits n'en sont que des moitiés. Nous les unissons de la façon suivante.

Proposition (cf. [10]). *Il existe un opérateur différentiel linéaire du second ordre* $D\colon \Omega^n/\mathcal{J}^n \to \mathcal{J}^{n+1}$ *tel que:*

$$0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \xrightarrow{d_Q} \Omega^1/\mathcal{J}^1 \xrightarrow{d_Q} \cdots \xrightarrow{d_Q} \Omega^n/\mathcal{J}^n \xrightarrow{D} \mathcal{J}^{n+1} \xrightarrow{d_Q} \mathcal{J}^{n+2} \xrightarrow{d_Q} \cdots \xrightarrow{d_Q} \mathcal{J}^{2n+1} \to 0$$

soit une résolution des constantes. La cohomologie de ce complexe coïncide donc avec la cohomologie de De Rham de M.

Pour construire D, nous commençons par définir un relèvement $\widetilde{D}\colon \Omega^n/\{\theta \wedge \alpha | \alpha \in \Omega^{n-1}\} \simeq \Lambda^n Q^* \to \mathcal{J}^{n+1}$ de la façon suivante.

Lemme. *Soit* $\alpha \in \Lambda^n Q^*$, *il existe un unique relèvement* $\tilde{\alpha}$ *de* α *dans* Ω^n *tel que* $d\tilde{\alpha} \in \mathcal{J}^{n+1}$. *On pose alors* $\widetilde{D}\alpha = d\tilde{\alpha}$.

Démonstration. Si $\overline{\alpha}$ est un relèvement quelconque de α, on cherche un $\beta \in \Lambda^{n-1} Q^*$ tel que $\tilde{\alpha} = \overline{\alpha} + \theta \wedge \beta$ vérifie $\theta \wedge d\tilde{\alpha} = 0$, soit $(d\overline{\alpha} + d\theta \wedge \beta)_{\restriction Q} = 0$. Cela est possible de façon unique car l'opérateur L défini ci-dessus est un isomorphisme en degré $n-1$. Comme on a aussi $d\theta \wedge d\tilde{\alpha} = d(\theta \wedge d\tilde{\alpha}) = 0$, on a bien finalement $d\tilde{\alpha} \in \mathcal{J}^{n+1}$. q.e.d.

On montre maintenant que $\widetilde{D}$ passe au quotient en D défini sur $\Omega^n/\mathcal{J}^n \simeq \Lambda^n Q^*/\{d\theta \wedge \beta | \beta \in \Omega^{n-2}\}$. En effet, soit $\overline{d\theta \wedge \beta}$ la projection de $d\theta \wedge \beta$ dans $\Lambda^n Q^*$. On a: $d(d\theta \wedge \beta - \theta \wedge d\beta) = 0 \in \mathcal{J}^{n+1}$ d'où, $d\theta \wedge \beta - \theta \wedge d\beta$ est le relèvement cherché de $\overline{d\theta \wedge \beta}$ dans Ω^n et alors: $\widetilde{D}(\overline{d\theta \wedge \beta}) = d(d\theta \wedge \beta - \theta \wedge d\beta) = 0$. $\widetilde{D}$ passe bien au quotient en D.

On note que D est un opérateur du second ordre en dérivées suivant Q, un pour l'opération de relèvement suivi d'une différentiation de la forme trouvée. Les opérateurs d_Q eux, sont d'ordre un toujours uniquement en dérivée dans les directions hoirzontales. De plus, par construction, D ainsi que les autres opérateurs d_Q ne dépendent que de la structure de contact Q et non du choix de la forme de contact θ choisie.

Démontrons maintenant l'exactitude locale du complexe construit.

(i) Soit $\alpha \in \Omega^k/\mathcal{J}^k$ telle que $d_Q\alpha = 0$. Cela signifie qu'il existe un relèvement $\tilde{\alpha}$ de α dans Ω^k tel que $d\tilde{\alpha} = \theta \wedge \beta - d\theta \wedge \gamma \in \mathcal{J}^{q+1}$ d'où:

$$d(\tilde{\alpha} - \theta \wedge \gamma) = \theta \wedge \beta + d\theta \wedge \gamma - d\theta \wedge \gamma + \theta \wedge d\gamma = \theta \wedge (\beta + d\gamma),$$

avec $\tilde{\alpha} - \theta \wedge \gamma$ un autre relèvement de α. On s'est donc ramené à $d\tilde{\alpha} = \theta \wedge \beta$. On differentie $0 = d\theta \wedge \beta + \theta \wedge d\beta$.

D'où, en restriction sur Q $d\theta \wedge \beta_{\restriction Q} = L(\beta_{\restriction Q}) = 0$, et par l'injectivité de L pour $k \leq n-1$, on a $\beta_{\restriction Q} = 0$.

On peut donc écrire $\beta = \theta \wedge \delta$, et on obtient alors $d\tilde{\alpha} = \theta \wedge \beta = 0$. Il existe donc localement $\mu \in \Omega^{k-1}$ tel que $\tilde{\alpha} = d\mu$. En projetant μ en $\overline{\mu} \in \Omega^{k-1}/\mathcal{J}^{k-1}$, on obtient finalement $\alpha = d_Q\overline{\mu}$, ce qui montre l'exactitude locale en degré $k \leq n-1$.

(ii) Soit $\alpha \in \mathcal{J}^k$ telle que $d_Q\alpha (= d\alpha) = 0$, alors localement il existe $\beta \in \Omega^{k-1}$ telle que $\alpha = d\beta$. On écrit $\beta = \theta \wedge \gamma + d\theta \wedge \mu$ par surjectivité de L en degré $k-3 \geq n-1$, i.e., $k \geq n+2$ d'où

$$\beta - d(\theta \wedge \mu) = \theta \wedge \gamma + d\theta \wedge \mu - d\theta \wedge \mu + \theta \wedge d\mu,$$
$$\beta' = \theta \wedge (\gamma + d\mu)$$

avec $d\beta' = d\beta = \alpha$ et $\theta \wedge \beta' = 0$. Enfin, on a $d\theta \wedge \beta' = d(\theta \wedge \beta') + \theta \wedge d\beta' = d.0 + \theta \wedge \alpha = 0$ car $\alpha \in \mathcal{J}^k$, et finalement $\beta' \in \mathcal{J}^{k-1}$. C'est l'exactitude locale en degré $k \geq n+2$. Il nous reste à la vérifier aux degrés n et $n+1$.

(iii) En degré n. Soit $\alpha \in \Omega^n/\mathcal{J}^n$ telle que $D\alpha = 0$. Alors par définition il existe un relèvement $\tilde{\alpha}$ de α tel que $d\tilde{\alpha} = 0$. Il existe donc $\beta \in \Omega^{n-1}$ tel que $\tilde{\alpha} = d\beta$, et par projection de β, $\alpha = d_Q\overline{\beta}$.

(iv) En degré $n+1$. Soit $\alpha \in$ telle que $d_Q\alpha \ (= d\alpha) = 0$. Alors localement, il existe $\beta \in \Omega^n$ telle que $\alpha = d\beta \in \mathcal{J}^{n+1}$ et par projection $\alpha = D(\overline{\beta})$. q.e.d.

Le complexe de contact nous propose bien un substitut algébrique au complexe de De Rham. Nous allons montrer maintenant qu'il possède une régularité analytique l'hypoellipticité. Cela nous permettra de représenter la cohomologie par des formes harmoniques au sens des nouveaux opérateurs de différentiation introduits. Sur les groupes d'Heisenberg, cette jauge sera bien invariante par dilatation, comme souhaité.

3. La régularité hypoelliptique du complexe de contact

Soit M une variété compacte sans bord de dimension $2n+1$ munie d'une structure de contact Q. Nous savons déjà par le §2 que la cohomologie à coefficients réels de M coïncide avec celle du complexe de contact. Pour les applications, nous aurons besoin de pouvoir la représenter par des formes d_Q-harmoniques, c'est à dire d_Q-fermées et cofermées.

Avant de définir les opérateurs de codifférentiation, nous devons munir M d'une métrique. Nous allons la choisir en quelque sorte adaptée à la structure de contact de manière à obtenir des expressions locales les plus simples possibles des opérateurs d_Q et leur adjoint.

Pour cela, on se donne une forme de contact θ. Il existe alors un unique champ de vecteur T transverse à Q vérifiant les équations $\theta(T) = 1$, et $\mathscr{L}_T\theta = 0$. T s'appelle le champ deReeb associé à la forme de contact θ. Nous allons choisir une métriques sur M telle que T soit de norme 1 et orthogonal à Q. Pour disposer sur le champ de contact d'une métrique "adaptée" à la forme symplectique $d\theta_{\restriction Q}$ nous commençons pr le mumir d'une structure complexe "calibrée"; c'est un endomorphisme J de Q vérifiant $J^2 = -\mathrm{Id}$, $d\theta(X, JY) = -d\theta(JX, Y)$ $\forall X, Y \in Q$ et $d\theta(X, JX) > 0$ $\forall X \in Q\backslash\{0\}$.

Un tel choix est toujours possible globalement sur M, dès que le champ de plans Q est orientable, ce que nous supposerons désormais, bien que cela ne soit pas essentiel.

Preuve (cf. Weinstein [16], par ex.). Soit g une métrique riemannienne quelconque sur M. En restriction sur Q, nous pouvons écrire $d\theta_{\restriction Q} = g_{\restriction Q}(A\cdot, \cdot)$ avec A antisymétrique. Nous décomposons ensuite A sous la forme $S.J$ avec S symétrique définie positive et J orthogonale. En fait, J est ici une structure complexe calibrée comme on le vérifie aisément. q.e.d.

On obtient finalement une métrique g_Q sur Q en posant $g_Q = d\theta_{\restriction Q}(\cdot, J\cdot)$ et une autre dite "adaptée" définie sur TM par $g_\theta = \theta^2 + d\theta(\cdot, J\cdot)$, où on a prolongé J sur TM par $JT = T$. Celle-ci s'étend canoniquement sur l'espace des formes différentielles.

Nous pouvons alors identifier les quotients $\Omega^k/\mathscr{I}^k$ $(k \leq n)$ apparaissant dans le complexe de contact aux sous-espaces, notés $\mathscr{J}^k$, des "vraies" formes α orthogonales à $\mathscr{I}^k$, c'est à dire vérifiant $i_T\alpha = 0$ et $\Lambda\alpha = 0$ où Λ désigne l'adjoint de l'opérateur $L = d\theta \wedge \cdot$.

La métrique choisie nous fournit également un opérateur de dualité, noté $*$, et défini par $\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta).\theta \wedge (d\theta)^n$, $\forall\alpha, \beta \in \Omega^*$ (cf. De Rham [1]).

On vérifie que $\mathscr{J}^k$ et $\mathscr{J}^{2n+1-k}$ sont mis en dualité par $*$.

Preuve. Soit $\alpha \in \mathscr{J}^{2n+1-k}$, cela signifie que $\theta \wedge \alpha = 0$ et $d\theta \wedge \alpha = 0$. On a alors $\forall \beta \in \Omega^{k-1}$, $(\theta \wedge \beta, *\alpha)\,d\mathrm{vol} = \theta \wedge \beta \wedge *(*\alpha)$ avec $*^2\alpha = \alpha$ en dimension impaire (cf. De Rham), d'où $(\theta \wedge \beta, *\alpha) = 0$. On trouve de même $\forall \gamma \in \Omega^{k-2}$, $(d\theta \wedge \gamma, *\alpha)\,d\mathrm{vol} = d\theta \wedge \gamma \wedge *(*\alpha) = 0$. Ceci nous montre que $*\alpha$ est bien orthogonal à $\mathscr{I}^k = (\mathscr{J}^k)^\perp$. q.e.d.

Nous pouvons maintenant définir les adjoints formels des opérateurs d_Q et D par $\delta_Q = (-1)^k * d_Q *$ sur $\mathscr{J}^k$ $(k \neq n+1)$ et $D^* = (-1)^{n+1} * D *$ en degré $n+1$. Montrons que pour $\alpha \in \mathscr{J}^k$ et $\beta \in \mathscr{J}^{k+1}$, on a bien

$$(d_Q\alpha, \beta) = (\alpha, \delta_Q\beta) \quad \text{et} \quad (D\alpha, \beta) = (\alpha, D^*\beta) \quad \text{lorsque } k = n.$$

Preuve. On a pour $k \neq n$

$$(d_Q\alpha, \beta) - (\alpha, \delta_Q\beta) = \int_M d_Q\alpha \wedge *\beta + (-1)^k \alpha \wedge d_Q * \beta .$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$d(\alpha \wedge *\beta) = d_Q\alpha \wedge (*\beta) + (-1)^k \alpha \wedge d_Q(*\beta) .$$

Or, par construction, nous avons: $d_Q = d$ en degré $> n$ et $\mathrm{Im}(d_Q - d) \subset \mathcal{J}^*$ en degré $< n$. De plus, les formes de $\mathcal{J}^*$ annulent par produit extérieur celles de $\mathcal{J}^*$. La formule désirée résulte alors pour $k \neq n$ de celle connue avec les opérateurs d.

En degré n, par définition de D, il existe $\overline{\alpha} = \alpha + \theta \wedge \mu$ et $\overline{*\beta} = *\beta + \theta \wedge \nu$ tels que $D\alpha = d\overline{\alpha}$ et $D(*\beta) = d(\overline{*\beta})$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}(D\alpha, \beta) - (\alpha, D^*\beta) &= \int_M d\overline{\alpha} \wedge (*\beta) + (-1)^n \alpha \wedge d(\overline{*\beta}) \\ &= \int_M d\overline{\alpha} \wedge \overline{*\beta} + (-1)^n \overline{\alpha} \wedge d(\overline{*\beta}) - D\alpha \wedge \theta \wedge \nu \\ &\quad - (-1)^n \theta \wedge \mu \wedge D(*\beta) \\ &= \int_M d(\overline{\alpha} \wedge \overline{*\beta}) = 0\end{aligned}$$

car $D\alpha \wedge \theta = D(*\beta) \wedge \theta = 0$ par construction de D. q.e.d.

A ce point, nous disposons bien d'un substitut au complexe de De Rham possédant l'homogénéité désirée au §1, et qui se traduit ici par l'invariance coforme des opérateurs δ_Q sous les changements de métriques $g_\theta = \theta^2 + d\theta(\cdot, J\cdot)$ en $g_{k\theta} = k^2.\theta^2 + k.d\theta(\cdot, J\cdot)$, où k est une constante.

Il nous reste encore à montrer que ce complexe nous donne effectivement la possibilité de choisir dans chaque classes de cohomologie un représentant cofermé. Cette question est, classiquement, du ressort de l'analyse, et dépend plus particulièrement d'une étude locale de "régularité" des opérateurs construits.

Dans le cas présent le complexe n'est pas elliptique. En effet, on calcule aisément que $(d_Q\delta_Q + \delta_Q d_Q)f = -\sum_{i=1}^n (X_i^2.f + Y_i^2.f)$ sur les fonctions de H_{2n+1} avec les notations du §1. Néanmoins, nous allons montrer que les opérateurs possèdent un autre type de régularité appelée hypoellipticité maximale, plus faible que la précédente, mais suffisante pour disposer des propriétés voulues. Précisons d'abord cette notion dans les cas nous intéressant ici.

Définition (cf. Helffer-Nourrigat [5], par ex.). Soit P un opérateur sur les fonctions on les formes de M de degré k en dérivées suivant le champ de contact Q. On dit que P est *hypoelliptique maximal* si il existe des estimées locales de la forme

$$(*) \qquad \|f\|_{2,k,Q} \leq K.(\|Pf\|_2 + \|f\|_2)\,.$$

K désigne ici une constante indépendante de f à support compact dans le voisinage V d'étude, $\|f\|_2$ la norme L^2 de f et

$$\|f\|_{2,k,Q} = \sum_{l<k} \|X_{i_1}.X_{i_2}.\cdots .X_{i_l}.f\|_2\,,$$

où les $2n$ champs de vecteurs $\{X_1, X_2, \cdots, X_{2n}\}$ sont préalablement choisis sur V de façon à engendrer Q.

Le terme maximal signifie que les estimées $(*)$ sont les "meilleures" possibles, c'est à dire que l'opérateur P contrôle ici le maximum de dérivées.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème. *Soit M une variéte de contact munie d'une métrique adaptée. Les laplaciens suivants sont hypoelliptiques maximaux:*

(i) $\Delta_Q = (n-k)d_Q\delta_Q + (n-k+1)\delta_Q d_Q$ *sur* $\mathcal{J}^k$ *pour* $0 \leq k \leq n-1$,

(ii) $\Delta_Q = (d_Q\delta_Q)^2 + D^*D$ *sur* $\mathcal{J}^n$,

(iii) $\Delta_Q = DD^* + (\delta_Q d_Q)^2$ *sur* $\mathcal{J}^{n+1}$,

(iv) $\Delta_Q = (n-k+1)d_Q\delta_Q + (n-k)\delta_Q d_Q$ *sur* $\mathcal{J}^k$ *pour* $n+2 \leq k \leq 2n+1$.

On dispose d'autre part de théorèmes "à la Sobolev" d'injection compacte et de régularité concernant les espaces $L^2_{k,Q}$ des fonctions $\|\cdot\|_{2,k,Q}$ bornées (cf. Kohn, Folland, et Stein [3], [4], [9]). Ces résultats, associés aux estimées $(*)$ correspondant aux laplaciens Δ_Q, permettent d'obtenir des théorèmes de représentation harmonique semblables à ceux de la théorie elliptique, à savoir:

Corollaire. *Les solutions faibles de $\Delta_Q\alpha = \beta$ avec β de classe C^∞ sont C^∞:*

Les laplaciens Δ_Q induisent une décomposition orthogonale des formes C^∞ à support compact en $\mathcal{J}^* = \ker\Delta_Q \oplus \operatorname{Im}\Delta_Q$, avec $\ker\Delta_Q$ de dimension finie.

Dans chaque classe de d_Q-cohomologie à supporjt compact, il existe un unique représentant cofermé.

En particulier, si M est compacte, sa cohomologie se représente par des formes Δ_Q harmoniques.

La suite de ce paragraphe est consacrée à la preuve du théorème. L'hypoellipticité des laplaciens Δ_Q sera déduite de celle d'opérateurs scalaires plus simples. Pour cela, nous allons dériver des relations supplémentaires entre d_Q, δ_Q et de nouveaux opérateurs, notés d_H, de "différentiation" le long des hyperplans de contact. Ceux-ci sont définis sur $\Omega^*Q \overset{\text{déf}}{=} \{\alpha \in \Omega^*,\ i_T\alpha = 0\}$ par: $d_H = \Pi \circ d$, où T désigne le champ de Reeb associé à θ, et Π la projection orthogonale sur Ω^*Q. On note que ces opérateurs sont du premier ordre en dérivées suivant Q, c'est à dire qu'ils s'expriment localement à l'aide des composantes des formes et leurs dérivées premières dans les directions horizontales. Ils vérifient de plus

$$d_H^2 = -L\mathscr{L}_T = -\mathscr{L}_T L, \tag{1}$$

où $\mathscr{L}_T$ désigne la dérivée de Lie suivant T.

Preuve. Soit $\alpha \in \Omega^*Q$, on a alors $d_H\alpha = d\alpha - \theta\wedge i_T d\alpha = d\alpha - \theta\wedge\mathscr{L}_T\alpha$. D'où $dd_H\alpha = -d\theta\wedge\mathscr{L}_T\alpha + \theta\wedge d\mathscr{L}_T\alpha$, avec $\theta\wedge d\mathscr{L}_T\alpha \in \ker\Pi = \theta\wedge\Omega^*$, et $d\theta\wedge\mathscr{L}_T\alpha \in \operatorname{Im}\Pi$ car

$$i_T(d\theta\wedge\mathscr{L}_T\alpha) = i_T d\theta\wedge\mathscr{L}_T\alpha + d\theta\wedge i_T\mathscr{L}_T\alpha = 0 + d\theta\wedge\mathscr{L}_T i_T\alpha = 0.$$

Par projection, on a donc bien $d_H^2\alpha = -L\mathscr{L}_T\alpha = -\mathscr{L}_T L\alpha$. q.e.d.

La structure complexe J induit une décomposition des formes sur Q suivant leur bidegré, que nous écrivons

$$\Omega^k Q\otimes\mathbb{C} = \sum_{p+q=k}\Omega^{p,q}Q.$$

On note $\Pi^{p,q}$ la projection de $\Omega^*Q\otimes\mathbb{C}$ sur $\Omega^{p,q}Q$. Si P est un opérteur sur $\Omega^*Q\otimes\mathbb{C}$, posons, pour $k, l\in\mathbb{Z}$: $P^{k,l} = \sum_{p,q}\Pi^{p+k,q+l}\circ P\circ\Pi^{p,q}$. On trouve alors

$$d_H = d_H^{1,0} + d_H^{0,1} + T(J), \tag{2}$$

où $T(J)$ est un tenseur (i.e., un opérateur de degré 0) nul si la structure complexe est intégrable, c'est à dire lorsque $[Q^{1,0}, Q^{1,0}]\subset Q^{1,0}$.

Preuve. Cela découle de la formule de Cartan suivante, à savoir, pour $\alpha\in\Omega^k Q$ et $X_0, X_1, \cdots, X_k \in Q$, on a

(3)

$$\begin{aligned} d_H\alpha(X_0, X_1, \cdots, X_k) = &\sum_{0\le i\le k}(-1)^i X_i.(\alpha(X_0, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_k)) \\ &+ \sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_0, \cdots, \widehat{X}_i, \\ &\qquad \cdots, \widehat{X}_j, \cdots, X_k). \end{aligned}$$

Il y apparaît en effet que l'on a toujours $d_H\Omega^{p,q} \subset \Omega^{p+1,q} + \Omega^{p,q+1} + \Omega^{p+2,q-1} + \Omega^{p-1,q+2}$, c'est à dire $d_H = d_H^{1,0} + d_h^{0,1} + d_H^{2,-1} + d_H^{-1,2}$, les deux derniers termes ne faisant intervenir que la deuxième partie, algébrique en α, de la formule (3). q.e.d.

Si P est un opérateur différentiel linéaire sur $\Omega^* Q$, on définit son ordre comme étant le plus grand degré de dérivation des composantes des formes α dans une expression locale de $P\alpha$ ne faisant intervenir que des dérivées horizontales. Par exemple, ∂_T défini sur $C^\infty(M)$ par $\partial_T f = T.f$ est d'ordre 2 car on peut écrire $T.f = (Y_1.X_1 - X_1.Y_1).f + X.f$ où on a choisi $X_1 \in Q$ de norme 1, $Y_1 = JX_1 \in Q$, et $X = T - [Y_1, X_1] \in Q$.

Dans la suite, $o(k)$ désignera tout opérateur différentiel linéaire sur $\Omega^* Q$ de degré $< k$. On pose enfin $d_H^{1,0} = \partial_H$ et $d_H^{0,1} = \overline{\partial}_H$. Avec ces notations, nous pouvons réécrire (2) sous la forme

$$(2') \qquad d_H = \partial_H + \overline{\partial}_H + o(1).$$

De même, on vérifie aisément, à l'aide d'une formule du type (3) appliquée à $\mathscr{L}_T\alpha = i_T d\alpha$ pour $\alpha \in \Omega^* Q$, que l'on a

$$(4) \qquad \mathscr{L}_T = (\mathscr{L}_T)^{0,0} + o(1),$$

où $o(1)$ est un tenseur nul lorsque le flot du champ de Reeb conserve la structure complexe, i.e., $\mathscr{L}_T J = 0$.

En comparant les équations (2′), (1) et (4), on en déduit facilement les relations importantes suivantes:

$$(5) \qquad \partial_H^2 = o(2), \qquad \overline{\partial}_H^2 = o(2),$$

$$(6) \qquad \partial_H \overline{\partial}_H + \overline{\partial}_H \partial_H = -L\mathscr{L}_T + o(1),$$

où les o sont nuls si la structure complexe est intégrable et invariante par T. Dans ce cas $\overline{\partial}_H$ définit un complexe dont la cohomologie et la théorie harmonique ont été étudiées par Tanaka (cf. Tanaka [12] et plus loin).

Exprimons les adjoints des opérateurs d_H. Tout d'abord, l'opérateur $*$ de De Rham met $\Omega^k Q$ en dualité avec $\{\alpha \in \Omega^{2n+1-k}, \theta \wedge \alpha = 0\}$ que nous identifions à $\theta \wedge \Omega^{2n-k} Q$. Il est alors commode d'introduire l'opérateur $*_Q : \Omega^* Q \to \Omega^{2n-*} Q$ défini par $\alpha \wedge *_B \beta = (\alpha, \beta).d\theta^n$. Il vérifie $*_Q \beta = *(\theta \wedge \beta)$ pour $\beta \in \Omega^k Q$ $(k \geq n)$, et $* = (-1)^k \theta \wedge *_Q$ sur $\Omega^k Q$ $(k \leq n)$. Il en découle aisément que l'adjoint de d_H peut s'écrire

$$(7) \qquad \delta_H = - *_Q d_H *_Q .$$

Posons enfin $d_H^J = J^{-1} d_H J$ et son adjoint $\delta_H^J = J^{-1} \delta_H J$.

Nous disposons maintenant sur Q et Ω^*Q d'une structure suffisamment proche de la géométrie kählérienne pour nous permettre d'y transcrire des identités classiques à des o près, à savoir:

(8) $$[\Lambda, d_H] = -\delta_H^J + o(1), \qquad [\Lambda, d_H^J] = \delta_H + o(1),$$

ainsi que toutes celles déduites de celles-ci par passage à l'adjoint et décomposition suivant les bidegrés.

Preuve. Choisissons localement $\{X_1, JX_1, \cdots, X_n, JX_n\}$ une base orthonormale de Q. Celle-ci induit une trivialisation de Ω^*Q dans laquelle nous menons le calcul des expressions locales des opérateurs. Nous les comparons à celles obtenues dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, muni de sa structure kählérienne standard. Elles sont clairement identiques pour les opérateurs algébriques J, L, Λ, et $*_Q$. Par contre, la formule de Cartan (3) nous montre que les expressions de d_H diffèrent par des quantités algébriques fonctions des crochets des X_i, JX_i. Il en est donc de même pour δ_H par (7), ainsi que les commutateurs $[\Lambda, d_H]$ à calculer. q.e.d.

Nous rappelons dans la suite des résultats de Tanaka (aux o près) concernant les laplaciens $\Delta_H = d_H\delta_H + \delta_H d_H$, $\Delta_{\partial_H} = \partial_H\partial_H^* + \partial_H^*\partial_H$, et $\Delta_{\overline{\partial}_H} = \overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^* + \overline{\partial}_H^*\overline{\partial}_H$.

Proposition 1. (i) $\Delta_{\partial_H} - \Delta_{\overline{\partial}_H} = i(k-n)\mathscr{L}_T + o(2)$ *sur* Ω^kQ.

(ii) $\Delta_H = \Delta_H^{0,0} + o(2)$, *c'est à dire que* Δ_H *préserve les bidegrés à des* o *près.*

Preuve. (i) On a d'après (8)

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial_H} &= \partial_H^*\partial_H + \partial_H\partial_H^* = (i[\Lambda, \overline{\partial}_H])\partial_H + \partial_H(i[\Lambda, \overline{\partial}_H]) + o(2), \\ &= i\Lambda\overline{\partial}_H\partial_H - i\overline{\partial}_H\Lambda\partial_H + i\partial_H\Lambda\overline{\partial}_H - i\partial_H\overline{\partial}_H\Lambda + o(2),\end{aligned}$$

et de même

$$\Delta_{\overline{\partial}_H} = -i\Lambda\partial_H\overline{\partial}_H + i\partial_H\Lambda\overline{\partial}_H - i\overline{\partial}_H\Lambda\partial_H + i\overline{\partial}_H\partial_H\Lambda + o(2),$$

d'où

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial_H} - \Delta_{\overline{\partial}_H} &= i\Lambda(\overline{\partial}_H\partial_H + \partial_H\overline{\partial}_H) - i(\partial_H\overline{\partial}_H + \overline{\partial}_H\partial_H)\Lambda + o(2) \\ &= i\Lambda(-\mathscr{L}_T L) + i\mathscr{L}_T L\Lambda + o(2) \quad \text{(cf. 6)} \\ &= -i[\Lambda, L]\mathscr{L}_T + o(2) = i(k-n)\mathscr{L}_T + o(2).\end{aligned}$$

(ii) Comme $d_H = \partial_H + \overline{\partial}_H + o(1)$ (cf. 2′), on a clairement $\Delta_H = \Delta_H^{0,0}\Delta_H^{-1,1} + \Delta_H^{1,-1} + o(2)$, avec

$$\begin{aligned}\Delta_H^{1,-1} &= \overline{\partial}_H^*\partial_H + \partial_H\overline{\partial}_H^* + o(2) = (-i[\Lambda, \partial_H])\partial_H + \partial_H(-i[\Lambda, \partial_H]) + o(2) \\ &= -i\Lambda\partial_H^2 + i\partial_H\Lambda\partial_H - i\partial_H\Lambda\partial_H + i\partial_H^2\Lambda + o(2) = o(2) \quad \text{(cf. 5)}.\end{aligned}$$

Il en est de même pour $\Delta_H^{-1,1}$. q.e.d.

En fait, nous allons voir que Δ_H est "presque" scalaire (i.e., modulo des o) sur chaque $\Omega^{p,q}Q$. Pour cela, nous l'exprimons en coordonnées locales.

Soit $\{X_k, Y_k = JX_k\}$ une base orthonormée de Q définie au voisinage d'un point. On pose $Z_k = (X_k - iY_k)/\sqrt{2} \in Q^{1,0}$, $Z_{\bar{k}} = (X_k + iY_k)/\sqrt{2} \in Q^{0,1}$, θ^k et $\theta^{\bar{k}}$ la base duale associée. Pour $\alpha = \sum_{I,J} \alpha_{I,J}\theta^I \wedge \theta^{\bar{J}} \in \Omega^* Q \otimes \mathbb{C}$, on note

$$i_k\alpha = \alpha(Z_k, \cdot), \quad e_k\alpha = \theta^k \wedge \alpha, \quad \partial_k\alpha = \sum_{I,J}(Z_k.\alpha_{I,J})\theta^I \wedge \theta^{\bar{J}},$$

ainsi que $e_{\bar{k}}$, $i_{\bar{k}}$, $\partial_{\bar{k}}$ les opérateurs conjugués. On vérifie facilement les relations suivantes: $\partial_{\bar{k}}\partial_k - \partial_k\partial_{\bar{k}} \simeq i\partial_T$, $L = i\sum_{k=1}^n e_k e_{\bar{k}}$, $\Lambda = i\sum i_k i_{\bar{k}}$, $\partial_H \simeq \sum \partial_k e_k$ $(= \sum e_k\partial_k)$, $\partial_H^* \simeq -\sum \partial_{\bar{k}} i_k$ $(= -\sum i_k \partial_{\bar{k}})$, $\mathscr{L}_T \simeq \partial_T$, où $A \simeq B$ signifie que A et B sont du même ordre p avec $A = B + o(p)$. A l'aide de ces relations, nous allons montrer la

Proposition 2. *On a sur* $\Omega^{p,q}Q$:

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial_H} &\simeq -\left(1 - \frac{p}{n}\right)\sum \partial_{\bar{k}}\partial_k \frac{p}{n}\sum \partial_k\partial_{\bar{k}} \\ &\simeq -\frac{1}{2}\sum(X_k^2 + Y_k^2) + i\left(p - \frac{n}{2}\right)\partial_T,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta_H &\simeq -\left(1 + \frac{p-q}{n}\right)\sum \partial_k\partial_{\bar{k}} - \left(1 - \frac{p-q}{n}\right)\sum \partial_{\bar{k}}\partial_k \\ &\simeq -\sum(X_k^2 + Y_k^2) + i(p-q)\partial_T.\end{aligned}$$

Calcul.

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial_H} &= \partial_H^*\partial_H + \partial_H\partial_H^* \\ &\simeq -\left(\sum \partial_{\bar{k}} i_k\right)\left(\sum e_l\partial_l\right) - \left(\sum e_l\partial_l\right)\left(\sum \partial_{\bar{k}} i_k\right) \\ &\simeq -\sum_{k\neq l} \partial_{\bar{k}}\partial_l(i_k e_l + e_l i_k) - \sum \partial_{\bar{k}}\partial_k i_k e_k - \sum \partial_k\partial_{\bar{k}} e_k i_k\end{aligned}$$

avec

$$e_k i_l + i_l e_k = \delta_{l,k},$$

d'où

$$\Delta_{\partial_H} \simeq -\sum \partial_{\bar{k}}\partial_k + \sum(\partial_{\bar{k}}\partial_k - \partial_k\partial_{\bar{k}})e_k i_k \simeq -\sum \partial_{\bar{k}}\partial_k + i\partial_T\left(\sum e_k i_k\right).$$

Or

$$e_k i_k \theta^I \wedge \theta^{\bar{J}} = \begin{cases} \theta^I \wedge \theta^{\bar{J}} & \text{si } k \in I, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On en déduit $\sum e_k i_k = p.\mathrm{Id}$ sur $\Omega^{p,q}Q$ et finalement $\Delta_{\partial_H} \simeq -\sum \partial_{\bar{k}}\partial_k + ip\partial_T$.

On obtient alors les formules désirées pour Δ_{∂_H} en substituant ci-dessus $i\partial_T = n^{-1}\sum \partial_{\bar{k}}\partial_k - \partial_k\partial_{\bar{k}}$ et $\sum \partial_k\partial_{\bar{k}} + \partial_{\bar{k}}\partial_k = \sum(X_k^2 + Y_k^2)$. Les résultats souhaités pour $\Delta_H \simeq \Delta_{\partial_H} + \Delta_{\bar{\partial}_H}$ s'en déduisent immédiatement. q.e.d.

Les opérateurs scalaires $-\sum(X_k^2 + Y_k^2) + i\lambda T$, qui apparaissent dans les formules, sont bien connus et one été étudiés par Kohn, Folland, Stein, $\cdots$. Ils sont hypoelliptiques (cf. Kohn [2]) maximaux (cf. Folland-Stein [3], [5], [9]) pour $|\lambda| \neq n, n+2, n+4, \ldots$. En particulier, on a le

Corollaire 3. *Δ_H est hypoelliptique maximal sur $\Omega^{p,q}$ pour p et $q < n$.*

Nous reviendrons sur ce résultat pour établir la régularité de Δ_Q, lorsque nous aurons établi des identités entre les laplaciens Δ_Q et Δ_H. Pour cela, nous allons tout d'abord exprimer les opérateurs d_Q, δ_Q et D.

Proposition 4. (i) *On a sur $\mathscr{J}^k$ pour $0 \leq k \leq n-1$:*

$$d_Q \simeq d_H + (n-k+1)^{-1} L\delta_H^J \quad et \quad \delta_Q = \delta_H, \tag{9}$$

(ii) *et en degré n*

$$i_T D \simeq \mathscr{L}_T - d_H \delta_H^J. \tag{10}$$

Preuve. (i) Soit $\alpha \in \mathscr{J}^k$ avec $0 \leq k \leq n-1$, par définition $d_Q\alpha$ est la projection orthogonale de $d_H\alpha$ sur $\ker\Lambda$. D'après A. Weil, il existe des coefficients a_s (universels) tels que: $d_Q\alpha = \sum_{s\geq 0} a_s L^s \Lambda^s d_H\alpha$ (cf. Weil [14]). Ici l'expression se simplifie car on a: $\Lambda^s d_H\alpha = o(1)\alpha$ pour $s \geq 2$. En effet, d'après (8): $\Lambda d_H\alpha = d_H\Lambda\alpha - \delta_H^J\alpha + o(1)\alpha = -\delta_H^J\alpha + o(1)\alpha$ car $\alpha \in \mathscr{J}^k \supset \ker\Lambda$. Et comme, $[\Lambda, \delta_H^J] = 0$, on trouve bien: $\Lambda^2 d_H\alpha = o(1)\alpha$. Pour calculer a_1, on écrit: $\Lambda d_Q\alpha = 0 = \Lambda(d_H + a_1 L\Lambda d_H)\alpha + o(1)\alpha$, avec $[\Lambda, L] = (n-k+1)\mathrm{Id}$ en degré $k-1$. En identifiant les termes de degré 1, on obtient $a_1 = -(n-k+1)^{-1}$, puis la relation (9) cherchée en utilisant (8). Enfin, on vérifie aisément que: $\delta_Q = \delta_H$ sur $\mathscr{J}^k$ grâce à: $[\delta_H, \Lambda] = 0$.

(ii) Soit $\alpha \in \mathscr{J}^n$, alors d'après le §2, $\exists!\beta \in \Omega^{n-1}Q$ tel que: $D\alpha = d(\alpha + \theta\wedge\beta)$. β est la solution de $L\beta = -d_H\alpha$. Montrons qu'en fait: $\beta = -\Lambda d_H\alpha$. En effet, on a: $L\Lambda d_H\alpha = \Lambda L d_H\alpha + d_H\alpha$, avec: $Ld_H\alpha = d_H L\alpha = 0$ car: $\alpha \in \ker\Lambda = \ker L$ en degré n. On obtient donc: $i_T D\alpha = \mathscr{L}_T\alpha + d_H\Lambda d_H\alpha$, puis la formule cherchée en utilisant (8). q.e.d.

Nous abordons enfin l'étude des laplaciens Δ_Q.

Proposition 5. *Δ_Q préserve "presque" le bidegré, i.e., $\Delta_Q \simeq \Delta_Q^{0,0}$.*

Preuve. (i) En degré $k \leq n-1$, on a d'après (8) et les relations ci-dessus:

$$d_Q\delta_Q \simeq d_H\delta_H + (n-k+2)^{-1} L\delta_H^J\delta_H$$

et

$$\begin{aligned}\delta_Q d_Q &\simeq \delta_H d_H + (n-k+1)^{-1}\delta_H L\delta_H^J \\ &\simeq \delta_H d_H + (n-k+1)^{-1}(L\delta_H\delta_H^J - d_H^J\delta_H^J) \\ &\simeq \delta_H d_H + (n-k+1)^{-1}(L\delta_H\delta_H^J + d_H^J\Lambda d_H) \\ \delta_Q d_Q &\simeq \delta_H d_H + (n-k+1)^{-1}(L\delta_H\delta_H^J + \Lambda d_H^J d_H - \delta_H d_H),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Delta_Q &= (n-k)d_Q\delta_Q + (n-k+1)\delta_Q d_Q \\ &\simeq (n-k)\Delta_H + \frac{n-k}{n-k+2}L\delta_H^J\delta_H + L\delta_H\delta_H^J + \Lambda d_H^J d_H.\end{aligned}$$

Or, on a vu que $\Delta_H \simeq \Delta_H^{0,0}$. De plus grâce à $(2')$, on trouve

$$d_H^J d_H \simeq i(\overline{\partial}_H - \partial_H)(\partial_H + \overline{\partial}_H) \simeq i(\overline{\partial}_H\partial_H - \partial_H\overline{\partial}_H) \simeq -d_H d_H^J,$$

ce qui nous montre bien que $d_H^J d_H$ et $d_H d_H^J$ sont de type $(1, 1)$ à des o près. On en déduit immédiatement que $\Delta_Q \simeq \Delta_Q^{0,0}$.

(ii) En degré n, nous commençons par exprimer les opérateurs d_Q, δ_Q, et $i_T D$ à l'aide de ∂_H, ∂_H^*, $\overline{\partial}_H$, et $\overline{\partial}_H^*$. Ces formules nous servirons aussi dans la preuve de l'hypoellipticité de Δ_Q en degré n. Tout d'abord, on a d'après (9)

$$\begin{aligned}d_Q\delta_Q &\simeq d_H\delta_H + \tfrac{1}{2}L\delta_H^J\delta_H \simeq d_H\delta_H + \tfrac{1}{2}(-d_H + \delta_H^J L)\delta_H \\ &\simeq \tfrac{1}{2}d_H\delta_H + \tfrac{1}{2}\delta_H^J(\delta_H L + d_H^J), \\ d_Q\delta_Q &\simeq \tfrac{1}{2}(d_H\delta_H + \delta_H^J d_H^J), \quad \text{car } L_{\restriction \mathcal{J}^n} = 0 = \Lambda_{\restriction \mathcal{J}^n}.\end{aligned} \tag{11}$$

D'autre part, on utilisera $D^*D = D^*(\theta \wedge i_T D) = (i_T D)^*(i_T D)$ avec (10). Nous rappelons enfin que

$$\begin{aligned}d_H &\simeq \partial_H + \overline{\partial}_H, & \delta_H &\simeq \partial_H^* + \overline{\partial}_H^*, \\ d_H^J &= J^{-1}d_H J \simeq i(\overline{\partial}_H - \partial_H), & \delta_H^J &= J^{-1}\delta_H J \simeq i(\partial_H^* - \overline{\partial}_H^*).\end{aligned}$$

Nous déduisons aisément de ces relations les identités voulues

$$\begin{aligned}&(d_Q\delta_Q)^{1,-1} \simeq \partial_H\overline{\partial}_H^*, \quad (d_Q\delta_Q)^{-1,1} \simeq \overline{\partial}_H\partial_H^*, \quad (d_Q\delta_Q)^{0,0} \simeq \frac{1}{2}\Delta_H, \\ &(i_T D)^{1,-1} \simeq i\partial_H\overline{\partial}_H^*, \quad (i_T D)^{-1,1} \simeq -i\overline{\partial}_H\partial_H^*, \\ &(i_T D)^{0,0} \simeq \mathscr{L}_T + i(\overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^* - \partial_H\partial_H^*),\end{aligned} \tag{12}$$

avec $\overline{\partial}_H\partial_H^* \simeq -\partial_H^*\overline{\partial}_H$ et $\overline{\partial}_H^*\partial_H \simeq -\partial_H\overline{\partial}_H^*$ comme on le voit en développant $\Delta_H \simeq (\Delta_H)^{0,0}$. Nous sommes maintenant en mesure de calculer:

$$\begin{aligned}\Delta_Q^{2,-2} &\simeq (d_Q\delta_Q)^{1,-1}(d_Q\delta_Q)^{1,-1} + (i_TD)^{*1,-1}(i_TD)^{1,-1}\\ &\simeq -\overline{\partial}_H^*\partial_H\partial_H\overline{\partial}_H^* + (-i\overline{\partial}_H^*\partial_H)(i\partial_H\overline{\partial}_H^*)\\ &= o(4) \quad \text{car } \partial_H^2 = o(2).\end{aligned}$$

De la même façon, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta_Q^{1,-1} &\simeq (d_Q\delta_Q)^{1,-1}(d_Q\delta_Q)^{0,0} + (d_Q\delta_Q)^{0,0}(d_Q\delta_Q)^{1,-1}\\ &\quad + (i_TD)^{*1,-1}(i_TD)^{0,0} + (i_TD)^{*0,0}(i_TD)^{1,-1}\\ &\simeq \partial_H\overline{\partial}_H^*\tfrac{1}{2}\Delta_H + \tfrac{1}{2}\Delta_H\partial_H\overline{\partial}_H^*\\ &\quad + i\partial_H\overline{\partial}_H^*(\mathscr{L}_T + i(\overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^* - \partial_H\partial_H^*))\\ &\quad + (-\mathscr{L}_T - i(\overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^* - \partial_H\partial_H^*))(i\partial_H\overline{\partial}_H^*)\\ &\simeq \tfrac{1}{2}(\partial_H\overline{\partial}_H^*\Delta_H + \Delta_H\partial_H\overline{\partial}_H^*)\\ &\quad - \partial_H\overline{\partial}_H^*\overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^* + \partial_H\overline{\partial}_H^*\partial_H\partial_H^* + \overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^*\partial_H\overline{\partial}_H^* - \partial_H\partial_H^*\partial_H\overline{\partial}_H^*,\end{aligned}$$

avec

$$\partial_H\overline{\partial}_H^*\partial_H\partial_H^* \simeq -\overline{\partial}_H^*\partial_H\partial_H\partial_H^* = o(4),$$

et de même

$$\overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^*\partial_H\overline{\partial}_H^* \simeq -\overline{\partial}_H\partial_H\overline{\partial}_H^*\overline{\partial}_H^* = o(4),$$

par contre

$$\begin{aligned}-\partial_H\overline{\partial}_H^*\overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^* &\simeq -\partial_H\overline{\partial}_H^*(\overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^* + \overline{\partial}_H^*\overline{\partial}_H)\\ &\simeq -\partial_H\overline{\partial}_H^*\Delta_{\overline{\partial}_H} \simeq -\tfrac{1}{2}\partial_H\overline{\partial}_H^*\Delta_H \quad \text{(cf. Proposition 1)}\end{aligned}$$

et de même

$$-\partial_H\partial_H^*\partial_H\overline{\partial}_H^* \simeq -(\partial_H\partial_H^* + \partial_H^*\partial_H)\partial_H\overline{\partial}_H^* \simeq -\Delta_{\partial_H}\partial_H\overline{\partial}_H^* \simeq -\tfrac{1}{2}\Delta_H\partial_H\overline{\partial}_H^*.$$

En reportant ceci, on obtient bien $\Delta_H^{1,-1} = o(4)$. Par conjugaison, on aura aussi $\Delta_H^{-2,2} = \Delta_H^{-1,1} = o(4)$, et finalement $\Delta_H \simeq \Delta_H^{0,0}$.

(iii) Le résultat en degré $\geq n+1$ peut se déduire des calculs précédents. En effet, on vérifie aisément que $\Delta_Q * = *\Delta_Q$ où $*$ échange $\Omega^{p,q}Q \cap \ker\Lambda = \mathscr{J}^{p,q}$ et $\theta \wedge \Omega^{n-q,n-p} \cap \ker L \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{J}^{n-q,n-p}$. q.e.d.

Nous approchons de notre but "comparer" les laplaciens Δ_Q et Δ_H pour essayer de déduire l'hypoellipticité du premier de celle du second. Cette méthode est sans doute assez artificielle. Elle a cependant l'avantage de pallier l'absence d'expression locale simple, c'est à dire scalaire, pour

Δ_Q, en dehors bien sûr des 0 formes, mais aussi des $(n, 0)$ et des $(0, n)$ formes comme nous le verrons plus loin.

Précisons tout d'abord le critère de "comparaison" des laplaciens que nous emploierons. Si A et B sont deux opérateurs différentiels linéaires (O.D.L.) définis sur un fibré vectoriel de base la variété de contact, on posera $A \gtrsim B$ si il existe un O.D.L. P tel que $A \simeq B + P^*P$. L'utilité de cette notion réside dans la

Proposition 6. *Si $A \gtrsim B \gtrsim 0$, alors l'hypoellipticité maximale de B entraîne celle de A.*

Ceci est en fait une application d'un critère d'hypoellipticité dû à Helffer et Nourrigat (cf. [5]) concernant, en particulier, les O.D.L. (et les systèmes d'O.D.L.) définis sur les groupes de Heisenberg. Soit $P : (C^\infty(H^{2n+1}))^m \to (C^\infty(H^{2n+1}))^l$ un tel opérateur d'ordre k. On lui associe en chaque point x_0 un opérateur tangent invariant par translations à gauche, P_{x_0}, puis sa partie homogène d'ordre maximal k, $P^k_{x_0}$.

En pratique, on exprime P sous la forme $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) X^\alpha$, où les X_α sont des monômes en les champs de vecteurs invariants $\{X_k, Y_k = JX_k\}_{1 \leq k \leq n}$ déjà rencontrés, et $a_\alpha(x)$ des matrices $l \times m$ à coefficients variables. Alors, on a $P^k_{x_0} = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x_0) X^\alpha$.

Soit Π une représentation irréductible de H^{2n+1}. On note $\Pi(P)$ l'image de $P^k_{x_0}$ par la représentation adjointe de Π restreint à $(\mathcal{S}_\Pi)^m \to (\mathcal{S}_\Pi)^l$, où $\mathcal{S}_\Pi$ désigne l'espaces des vecteurs C^∞ de Π.

Concrètement, $\mathcal{S}_\Pi$ s'identifie à l'espace noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ des fonctions complexes à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$, et Π est équivalente, soit à $\Pi_{a,b}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$\Pi_{a,b}(X_k) = ia_k, \qquad \Pi_{a,b}(Y_k) = ib_k, \qquad \Pi_{a,b}(T) = 0,$$

ou à Π_λ, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ avec

$$\Pi_\lambda(X_k) = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \Pi_\lambda(Y_k) = i\lambda x_k, \quad \Pi_\lambda(T) = i\lambda.$$

Helffer et Nourrigat démontrent que P est hypoelliptique maximal en x_0 si et seulement si $\Pi(P)$ est injectif pour toute Π non triviale.

Il ressort de sa définition que le "passage au symbole" $P \to \Pi(P)$ vérifie de plus les propriétés suivantes:

$$\Pi(A) = \Pi(B) \quad \text{si } A \simeq B, \quad \Pi(AB) = \Pi(A)\Pi(B), \quad \text{et} \quad \Pi(A^*) = \Pi(A)^*,$$

si $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ est muni de la norme standard: $(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f.\bar{g}$. La proposition voulue s'en déduit immédiatement, si on a tout d'abord pris soin, grâce au théorème de Darboux, de se placer par une transformation de contact dans le cas où la variété de contact est le groupe de Heisenberg.

Illustrons le critère obtenu en l'appliquant à Δ_H. Nous reprenons des notations déjà utilisées, i.e., choisissons localement une base orthonormée $\{X_i, Y_i = JX_i\}$ de Q, et travaillons dans la trivialisation de $\Omega^* Q$ qu'elle induit. Pour $f \in C^\infty(M)$, et $\alpha = \sum \alpha_{I,J} \theta^I \wedge \theta^{\overline{J}} \in \Omega^* Q$, on pose

$$\Delta_K f = -\sum_{i=1}^{n} (X_i^2 + Y_i^2) f \quad \text{(c'est le laplacien de Kohn)}$$

et

$$\Delta_K \alpha = \sum_{I,J} \Delta_K(\alpha_{I,J}) \theta^I \wedge \theta^{\overline{J}}.$$

Il est très facile de démontrer, en utilisant le critère d'Helffer et Nourrigat, l'hypoellipticité maximale de Δ_K. Celle de Δ_H sur $\Omega^{p,q} Q$ avec p et $q < n$, découle alors simplement de l'inégalité suivante:

$$n\Delta_H \gtrsim \Delta_K. \tag{13}$$

Démontrons la. Nous savons déjà par la Proposition 2 que

$$\Delta_H \simeq -\left(1 + \frac{p-q}{n}\right) \sum \partial_k \partial_{\overline{k}} - \left(1 - \frac{p-q}{n}\right) \sum \partial_{\overline{k}} \partial_k$$

et

$$\sum \partial_{\overline{k}} \partial_k + \partial_k \partial_{\overline{k}} \simeq \sum (X_k^2 + Y_k^2),$$

d'où

$$n\Delta_H \simeq \Delta_K - (n-1+p-q) \sum \partial_k \partial_{\overline{k}} - (n-1+q-p) \sum \partial_{\overline{k}} \partial_k.$$

Soit

$$n\Delta_H \simeq \Delta_K + P^* P$$

avec

$$\begin{aligned} P \colon \Omega^{p,q} Q &\to \Lambda^{1,0} Q \otimes \Omega^{p,q} Q + \Lambda^{0,1} Q \otimes \Omega^{p,q} Q, \\ \alpha &\to (\lambda_{1,0} \partial \alpha, \lambda_{0,1} \overline{\partial}_\alpha), \end{aligned}$$

où $\lambda_{1,0}^2 = n - 1 + q - p$ et $\lambda_{0,1}^2 = n - 1 + p - q$. q.e.d.

Nous énonçons maintenant les inégalités clefs de l'hypoellipticité de Δ_Q.

Proposition 7. (i) $(n-k+2)\Delta_Q \gtrsim (n-k)(n-k+1)\Delta_H$ *sur* $\mathscr{J}^k$ *pour* $k \le n-1$.

(ii) $4\Delta_Q \gtrsim \Delta_H^2$ *sur* $\mathscr{J}^{p,q}$ *pour* $p + q = n$ *avec* p *et* $q < n$.

(iii) $\Delta_Q \simeq (\Delta_K + i(n+1)\partial_T)^2$ *sur* $\mathscr{J}^{n,0}$ (*resp.* $(\Delta_K - i(n+1)\partial_T)^2$ *sur* $\mathscr{J}^{0,n}$).

(iv) *Les formules ci-dessus sont valables en degré complémentaire en remplaçant* k *par* $2n+1-k$.

En bidegré $\neq (n, o)$ et (o, n), l'hypoellipticité maximale de Δ_H entraîne donc celle de Δ_Q. En ce qui concerne $P_{n+1} \overset{\text{déf}}{=} \Delta_K + i(n+1)\partial_T$, et son conjugé P_{-n-1}, bien que n'étant plus positifs, ils restent hypoelliptiques (cf. Folland, Rothschild et Stein [3], [9]).

Pour le voir en utilisant le critère d'Helffer et Nourrigat, on commence par vérifier l'identité $\partial_{\overline{k}} P_{n+1} \simeq P_{n-1}\partial_{\overline{k}}$ pour $1 \leq k \leq n$ $(\partial_{\overline{k}} P_\lambda \simeq P_{\lambda-2}\partial_{\overline{k}}$ en général). Ensuite, au niveau d'une représentation Π (cf. critère), si $\Pi(P_{n+1})f = 0$ alors $\Pi(P_{n-1})\Pi(\partial_{\overline{k}})f = 0$. Or, P_{n-1} est hypoelliptique car $\gtrsim \Delta_K/n$ (cf. preuve de (13)), d'où $\Pi(\partial_{\overline{k}})f = 0$. En écrivant $P_{n+1} \simeq n^{-1}\sum \partial_{\overline{k}}\partial_k - (2+n^{-1})\sum \partial_k\partial_{\overline{k}}$ avec $-\partial_k \simeq \partial_{\overline{k}}^*$, on trouve alors $\Pi(\partial_k)f = 0$. Finalement $\Pi(X)f = 0 \forall X \in Q$, d'où l'on tire facilement $f = 0$.

Passons à la preuve de la proposition. (i) On introduit sur $\mathscr{J}^k$ l'opérateur suivant:

$$\Delta_Q' = (n-k+2)d_Q\delta_Q + (n-k+1)\delta_Q d_Q.$$

Cette nouvelle combinaison de $d_Q\delta_Q$ et $\delta_Q d_Q$ ne conserve plus les bidegrés à des o près. Cependant, nous allons montrer que

$$(\Delta_Q')^{0,0} \simeq (n-k+1)\Delta_H.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\Delta_Q' &\simeq (n-k+2)(d_H\delta_H + (n-k+2)^{-1}L\delta_H^J\delta_H) \\ &\quad + (n-k+1)(\delta_H d_H + (n-k+1)^{-1}\delta_H L\delta_H^J) \quad \text{(cf. Proposition 4)} \\ &\simeq (n-k+1)(d_H\delta_H + \delta_H d_H) + d_H\delta_H + \delta_H L\delta_H^J + L\delta_H^J\delta_H \\ &\simeq (n-k+1)\Delta_H + d_H\delta_H - d_H^J\delta_H^J + L(\delta_H^J\delta_H + \delta_H\delta_H^J).\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}(d_H\delta_H - d_H^J\delta_H^J)^{0,0} &\simeq ((\partial_H + \overline{\partial}_H)(\partial_H^* + \overline{\partial}_H^*) - i(\overline{\partial}_H - \partial_H)i(\partial_H^* - \overline{\partial}_H^*))^{0,0} \\ &\simeq \partial_H\partial_H^* + \overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^* - \partial_H\partial_H^* - \overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^* = o(2)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\delta_H^J\delta_H + \delta_H\delta_H^J)^{-1,-1} &\simeq (i(\partial_H^* - \overline{\partial}_H^*)(\partial_H^* + \overline{\partial}_H^*) \\ &\quad + (\partial_H^* + \overline{\partial}_H^*)i(\partial_H^* - \overline{\partial}_H^*))^{-1,-1} \\ &\simeq i(\partial_H^*\overline{\partial}_H^* - \overline{\partial}_H^*\partial_H^* + \overline{\partial}_H^*\partial_H^* - \partial_H^*\overline{\partial}_H^*) = o(2).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}(n-k+2)\Delta_Q &\simeq (n-k+2)\Delta_Q^{0,0} \quad \text{(cf. Proposition 5)}\\ &\simeq (n-k+2)((n-k)d_Q\delta_Q + (n-k+1)\delta_Q d_Q)^{0,0}\\ &\simeq (n-k)(\Delta'_Q)^{0,0} + 2(n-k+1)(\delta_Q d_Q)^{0,0}\\ &\simeq (n-k+1)[(n-k)\Delta_H + 2((d_Q^{1,0})^*(d_Q^{1,0}) + (d_Q^{0,1})^*(d_Q^{0,1}))],\end{aligned}$$

soit

$$(n-k+2)\Delta_Q \gtrsim (n-k)(n-k+1)\Delta_H.$$

(ii) On a en degré n:

$$\Delta_Q \simeq \Delta_Q^{0,0} \simeq ((d_Q\delta_Q)^2 + (i_T D)^*(i_T D))^{0,0}.$$

En développant, on trouve:

$$\Delta_Q \simeq (d_Q\delta_Q)^{0,0}(d_Q\delta_Q)^{0,0} + \sum_{k=-1,1} ((d_Q\delta_Q)^{k,-k})^*(d_Q\delta_Q)^{k,-k} + \sum_{k=-1,0,1} ((i_T D)^{k,-k})^*(i_T D)^{k,-k}$$

avec

$$2(d_Q\delta_Q)^{0,0} \simeq \Delta_H \quad \text{d'après (12)}$$

d'où

$$4\Delta_Q \gtrsim \Delta_H^2.$$

(iii) En bidegré $(n, 0)$, nous allons exprimer tous les termes du développement de Δ_Q figurant ci-dessus. On a tout d'abord:

$$\Delta_H \simeq \Delta_{\partial_H} + \Delta_{\overline{\partial}_H} \simeq 2\Delta_{\partial_H} \text{ en degré } n \quad \text{(cf. Proposition 1)}.$$

Soit en fait $\Delta_H \simeq 2\partial_H\partial_H^*$ car $\partial_H = 0$ en bidegré $(n, 0)$ $(\Omega^{n+1,0}Q = 0)$.

D'autre part:

$$\begin{aligned}((i_T D)^{1,-1})^*(i_T D)^{1,-1} &\simeq (-i\overline{\partial}_H\partial_H^*)(i\partial_H\overline{\partial}_H^*) \quad \text{(cf. 12)}\\ &= o(4) \quad \text{car } \overline{\partial}_H^* = 0 \text{ en bidegré } (n, 0).\end{aligned}$$

On trouve de même:

$$((d_Q\delta_Q)^{1,-1})^*(d_Q\delta_Q)^{1,-1} \simeq (\overline{\partial}_H\partial_H^*)(\partial_H\overline{\partial}_H^*) = o(4).$$

Quant à:

$$\begin{aligned}((i_T D)^{-1,1})^*(i_T D)^{-1,1} &\simeq ((d_Q\delta_Q)^{-1,1})^*(d_Q\delta_Q)^{-1,1} \simeq (\partial_H\overline{\partial}_H^*)(\overline{\partial}_H\partial_H^*)\\ &\simeq \partial_H(\overline{\partial}_H^*\overline{\partial}_H + \overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^*)\partial_H^* \quad \text{car } \overline{\partial}_H^* = O \text{ sur } \Omega^{n-1,0}.\end{aligned}$$

$$X \simeq \partial_H\Delta_{\overline{\partial}_H}\partial_H^*,$$

or, d'après la Proposition 2: $\Delta_{\overline{\partial}_H} \simeq \Delta_{\partial_H} + i\mathscr{L}_T$ sur les $n-1$ formes, d'où

$$X \simeq \partial_H(\Delta_{\partial_H} + i\mathscr{L}_T)\partial_H^* \simeq i\mathscr{L}_T\partial_H\partial_H^* + \Delta_{\partial_H}\partial_H\partial_H^*$$
$$\simeq i\mathscr{L}_T\partial_H\partial_H^* + (\partial_H\partial_H^*)^2 .$$

Il nous reste à voir:

$$(i_T D)^{0,0} \simeq \mathscr{L}_T + i(\overline{\partial}_H\overline{\partial}_H^* - \partial_H\partial_H^*) \simeq \mathscr{L}_T - i\partial_H\partial_H^* .$$

Récapitulons:

$$\Delta_Q \simeq (\partial_H\partial_H^*)^2 + (-\mathscr{L}_T + i\partial_H\partial_H^*)(\mathscr{L}_T - i\partial_H\partial_H^*)$$
$$+ 2(i\mathscr{L}_T\partial_H\partial_H^* + (\partial_H\partial_H^*)^2)$$
$$\simeq 4(\partial_H\partial_H^*)^2 - \mathscr{L}_T^2 + 4i\mathscr{L}_T\partial_H\partial_H^* \simeq (2\partial_H\partial_H^* + i\mathscr{L}_T)^2 .$$

Soit

$$\Delta_Q \simeq (\Delta_H + i\mathscr{L}_T)^2 \quad \text{avec } \Delta_H \simeq \Delta_K + in\mathscr{L}_T \text{ en bidegré } (n, 0)$$

(cf. Proposition 2).

(iv) Les identités cherchées en degré $\geq n+1$ se déduisent par conjugaison suivant $*$ de celles déjà obtenues. q.e.d.

L'expression particulièrement simple de Δ_Q obtenue en bidegrés $(n, 0)$ et $(0, n)$ peut se retrouver de façon moins mystérieuse en considérant les deux opérateurs

$$P^{\pm} = d_Q\delta_Q \pm i^{n+1} * D ,$$

Ils sont autoadjoints et vérifient: $\Delta_Q = {P^+}^2 = {P^-}^2$, somme il résulte des identités $D^* = (-1)^{n+1} * D*$ et $*^2 = 1$ rencontrées plus haut. P^+ et P^- ne préservent pas les bidegrés mais seulement des paires $\mathscr{J}^{p,q} \oplus \mathscr{J}^{p+1,q-1}$. Plus précisement, on montre la

Proposition 8. *P^+ (resp. P^-) conservent à des o près les espaces*

$$\mathscr{J}^{\lambda+2k,\, n-\lambda-2k} \oplus \mathscr{J}^{\lambda+2k+1,\, n-\lambda-2k-1},$$

où $k \in \mathbb{Z}$ et $\lambda = (n+1)(n+2)/2 + 1$ (resp. $(n+1)(n+2)/2$).

Démonstration. On note tout d'abord que $*D = *(\theta \wedge i_T D) = *_Q(i_T D)$. Comme $\ker L = \ker \Lambda$ en degré n, on a: $\mathscr{J}^n = i_T\mathscr{J}^{n+1}$, et finalement $i_T D$ est à valeurs dans $\mathscr{J}^n = \Omega^n Q \cap \ker \Lambda$. Sur de telles formes, $*_Q$ s'écrit simplement $(-1)^{n(n+1)/2} C$ où $C\alpha = \sum i^{p-q}\alpha^{p,q}$ (cf. Weil [14]). Il en résulte grâce aux formules (12) que l'on a sur $\mathscr{J}^{p,q}$:

$$(P^+)^{1,-1} \simeq (1 + (-1)^{(n+1)(n+2)/2+q+1})\partial_H\overline{\partial}_H^*$$

et

$$(P^+)^{-1,1} \simeq (1 + (-1)^{(n+1)(n+2)/2+q})\overline{\partial}_H \partial_H^*,$$

avec des formules analogues pour P^- en remplaçant q par $q+1$. Le résultat en découle immédiatement. q.e.d.

Comme $\mathscr{J}^{0,n+1} = \mathscr{J}^{n+1,0} = 0$, la proposition nous montre que les $\mathscr{J}^{n,0}$ et $\mathscr{J}^{0,n}$ sont préservés (à des o près) par P^+ ou P^-, suivant n. Ceci nous justifie l'existence d'expressions plus simples pour Δ_Q sur ces bidegrés extrêmes comme carrés parfaits d'opérateurs scalaires.

DEUXIÈME PARTIE
COMPLEXE DE CONTACT ET COURBURE

1. Recherche d'une connexion adaptée au complexe de contact

Nous disposons maintenant d'une nouvelle notion de forme harmonique sur les variétés de contact. Nous allons en proposer une application. Celle-ci consiste à obtenir des théorèmes d'annulation de la cohomologie en fonction de la positivité d'une courbure. Cela repose classiquement sur l'utilisation de formules "à la Weitzenböck" liant laplaciens des formes, connexion et courbure.

La connexion utilisée devra naturellement posséder la même homogénéité que Δ_Q, à savoir, ce qui nous a motivés jusqu'ici: l'invariance sous des changements de métriques adaptées $g_\theta = \theta^2 + d\theta(\cdot, J\cdot)$ en $g_{k\theta} = k^2\theta^2 + k\,d\theta(\cdot, J\cdot)$ où k est constant. Une telle connexion ∇ doit donc vérifier $\nabla g = 0$ et $\nabla\theta^2 = 0$ $(\Leftrightarrow \nabla\theta = 0)$.

La connexion de Levi-Civita ne possède pas cette propriété. En effet, $\nabla\theta = 0$ implique $\nabla_X Y \in Q$ pour tout $X, Y \in Q$. En particulier, la torsion de ∇, notée Tor, ne peut être nulle, car on obtient sur $Q \times Q$:

$$\theta(\mathrm{Tor}(X, Y)) = \theta(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) = d\theta(X, Y).$$

Cette condition n'est pas suffisante. En fait, on calcule pour toute connexion g_θ métrique:

$$(*) \qquad \begin{aligned} 2(\nabla_X\theta)(Y) = d\theta(X, Y) - \theta(\mathrm{Tor}(X, Y)) - (\mathrm{Tor}(T, X), Y) \\ - (\mathrm{Tor}(T, Y), X) - (J(\mathscr{L}_T J)(Y), X), \end{aligned}$$

où X et Y sont quelconques et $(\mathscr{L}_T J)(X) = [T, JX] - J[T, X]$ désigne la dérivée de Lie de la structure complexe suivant le champ de Reeb. Ce tenseur mesure aussi la déformation de la métrique par le flot de T puisque $\mathscr{L}_T g_\theta = d\theta(\cdot, (\mathscr{L}_T J)\cdot) = -g_\theta(\cdot, J(\mathscr{L}_T J)\cdot)$.

On vérifie d'autre part sans peine que l'on a $\forall X, Y$:

$$(J(\mathscr{L}_T J)(X), Y) = (J(\mathscr{L}_T J)(Y), X).$$

Par conséquent, en décomposant $(*)$ en partie symétrique et antisymétrique pour X et Y, on trouve que $\nabla\theta = 0$ si et seulement si:

$$\theta(\operatorname{Tor}(X, Y)) = d\theta(X, Y)$$

et $X \mapsto \operatorname{Tor}(T, X) + \frac{1}{2}J(\mathscr{L}_T J)(X)$ est antisymétrique pour g_θ.

Suivant Webster, Tanaka et Tanno [12], [14], [13] nous choisissons celle vérifiant:

$$\operatorname{Tor}(X, Y) = d\theta(X, Y)T \quad \text{pour } X, Y \in Q$$

et

$$\operatorname{Tor}(T, X) = -\tfrac{1}{2}J(\mathscr{L}_T J)(X).$$

Il est assez pénible mais pas difficile de montrer que cette connexion préserve la structure complexe, i.e., $\nabla J = 0$, lorsque J est intégrable, i.e., $[Q^{1,0}, Q^{1,0}] \subset Q^{1,0}$. (En général, elle vérifie toujours $\nabla_T J = 0$ tandis que $(\nabla_X J)(Y)$ pour X et Y dans Q est fonction du tenseur de Nijenhuis de la structure complexe). C'est en fait, d'après Webster [13], l'unique connexion métrique préservant θ et J dont la torsion $\operatorname{Tor}(T, X)$ vérifie $\operatorname{Tor}(T, JX) = -J\operatorname{Tor}(T, X)$, c'est-à-dire: $\operatorname{Tor}(T, Q^{0,1}) \subset Q^{1,0}$.

Nous nous plaçons dans la suite sous l'hypothèse d'intégrabilité de J. Cette condition n'est certainement pas cruciale ici, mais elle a l'avantage de limiter raisonnablement les calculs tensoriels nécessaires ensuite. Nous allons devoir en effet "chasser les o" des formules de la première partie.

Dans la suite, on appellera structure pseudohermitienne, la donnée sur une variété de contact, d'une forme de contact θ, d'une structure complexe intégrable J et d'une métrique associé $g = \theta^2 + d\theta(\cdot, J\cdot)$ (cf. [8], [14]). Une telle géométrie apparaît naturellement sur les hypersurfaces strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$.

2. Théorèmes d'annulation pseudohermitiens

Soit M une variété de $\dim 2n+1$ munie d'une structure pseudohermitienne. Nous cherchons un critère d'annulation de $H^k(M; \mathbb{R})$ pour $k < n$.

Pour obtenir ceci en géométrie riemannienne, on part d'une formule de Weitzenböck liant laplacien de Hodge–De Rham et laplacien de la connexion, à savoir: $\Delta = \nabla^*\nabla +$ courbure. On l'applique alors à une forme harmonique α en écrivant:

$$0 = (\Delta\alpha, \alpha) = |\nabla\alpha|^2 + (\text{courbure } \alpha, \alpha).$$

On en conclut que $\alpha = 0$ si la forme quadratique (courbure α, α) est définie positive.

Nous voulons transcrire cette méthode dans le cadre du complexe de contact et de la connexion pseudohermitienne. Il nous faut pour cela abandonner la forme d'équation de Weitzenböck décrite ci-dessus. En effet, le laplacien de contact Δ_Q n'est pas scalaire modulo des o, contrairement à $\nabla^*\nabla$. Nous allons, comme dans la première partie contourner ce fait en comparant Δ_Q à l'autre laplacien Δ_H qui, lui, est scalaire (modulo o), au moins pour chaque bidegré. Pour cela, il nous suffira d'expliciter l'inégalité $\Delta_Q \gtrsim K\Delta_H$ (K constante) obtenue dans la première partie (Proposition 8). Nous pourrons écrire: $\Delta_Q = K\Delta_H + P^*P + R_1$ où P est un opérateur de degré 1 et R_1 est algébrique. On ne peut cependant déduire de critère d'annulation de cette formule car $\alpha \mapsto (R_1\alpha, \alpha)$ se trouve être une forme quadratique "sans signe" au sens que $(R_1 J\alpha, J\alpha) = -(R_1\alpha, \alpha)$. Pour conclure, il nous faudra dériver une dernière formule de Weitzenböck-Tanaka pour Δ_H.

Passons maintenant à la preuve. Nous devons identifier les o de certaines formules "aprochées" de la première partie. Heureusement, les calculs nécessaires découlent de quelques expressions élémentaires que nous allons reprendre.

Tout d'abord, puisque J est intégrable, on a d'après (2):

$$d_H = \partial_H + \overline{\partial}_H. \tag{14}$$

D'autre part, en utilisant pour $\alpha \in \Omega^k Q \otimes \mathbb{C}$,

$$(\mathscr{L}_T\alpha)(X_1, \cdots, X_k) = -\sum_{i=1}^{k} \alpha(X_1, \cdots, [T, X_i], \cdots, X_k) + \mathscr{L}_T(\alpha(x_1, \cdots, x_k)),$$

on vérifie facilement que:

$$(\mathscr{L}_T)^{1,-1}\alpha = \sum \alpha(\cdots, \Pi^{0,1}\mathrm{Tor}(T, \cdot), \cdots) \tag{15}$$

et

$$(\mathscr{L}_T)^{-1,1}\alpha = \sum \alpha(\cdots, \Pi^{1,0}\mathrm{Tor}(T, \cdot), \cdots),$$

où $\Pi^{1,0}$ et $\Pi^{0,1}$ désignent respectivement les projections de $Q \otimes \mathbb{C}$ sur $Q^{1,0}$ et $Q^{0,1}$.

En développant $d_H^2 = -L\mathscr{L}_T$, on obtient alors:

$$\partial_H^2 = -L\mathscr{L}_T^{1,-1} \quad \text{et} \quad \overline{\partial}_H^2 = -L\mathscr{L}_T^{-1,1}. \tag{16}$$

Lemme 9. *Identités "kählériennes".*

$$[\Lambda, d_H] = -\delta_H^J \quad et \quad [\Lambda, d_H^J] = \delta_H. \tag{17}$$

Démonstration. On se place en $m \in M$. Il suffit d'après la preuve de (8) de trouver une trivialisation locale de Q par des avecteurs $\{X_1, Y_1 = JX_1, \cdots, X_n, Y_n = JX_n\}$ orthonormés et dont les crochets en m sont colinéaires à T. Pour en obtenir une, on part d'une base orthonormée $\{X_1, JX_1, \cdots, X_n, JX_n\}$. Nous la prolongeons ensuite sur un voisinage par transport parallèle le long, par exemple, des géodésiques issues de m. Les vecteurs obtenus $\{X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n\}$ sont bien orthonormés, dans Q et vérifient $Y_i = JX_i$ car la connexion pseudohermitienne est métrique et préserve θ et J. D'autre part, on a clairement en m $\nabla_X Y = 0$ pour tous les X, Y du repère. On y obtient alors: $0 = \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] + \mathrm{Tor}(X, Y)$ d'où $[X, Y] = -d\theta(X, Y)T$. Un tel repère est qualifié de normal en m dans la suite. q.e.d.

Ces nouvelles identités nous permettent de reprendre les calculs des expressions "approchés" de la première partie. Nous allons tout d'abord déterminer les parties de Δ_H et Δ_Q qui ne conservent pas les bidegrés. On obtient facilement en suivant la preuve de la Proposition 1:

$$\Delta_H - \Delta_H^{0,0} = i(\partial_H^2 - \overline{\partial}_H^2)\Lambda - i\Lambda(\partial_H^2 - \overline{\partial}_H^2). \tag{18}$$

En fait, pour l'application que nous allons en faire, seul nous intéresse $(\Delta_H\alpha, \alpha)$ pour $\alpha \in \mathscr{J}^k = \Omega^k Q \cap \ker \Lambda$. On trouve alors, en utilisant (16) et $[\Lambda, L] = n - k$:

$$((\Delta_H - \Delta_H^{0,0})\alpha, \alpha) = (n-k)(R_1\alpha, \alpha),$$

où on a posé, pour $\alpha \in \mathscr{J}^k$, $R_1\alpha = i(\mathscr{L}_T^{1,-1} - \mathscr{L}_T^{-1,1})\alpha$. D'après (15), on peut aussi écrire, pour $X_1, \cdots, X_k \in Q$:

$$\begin{aligned} R_1\alpha(X_1, \cdots, X_k) &= -\sum_{i=1}^k \alpha(X_1, \cdots, J\,\mathrm{Tor}(T, X_i), \cdots, X_k) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \alpha(X_1, \cdots, (\mathscr{L}_T J)(X_i), \cdots, X_k). \end{aligned} \tag{19}$$

De plus, on a clairement $R_1 J\alpha = -JR_1\alpha$, et en particulier:

$$(R_1(J\alpha), J\alpha) = -(R_1\alpha, \alpha).$$

Exprimons maintenant $\Delta_Q - \Delta_Q^{0,0}$. En reprenant les démonstrations des Propositions 4 et 5, on obtient:

$$\Delta_Q = (n-k)\Delta_H + \frac{n-k}{n-k+2}L\delta_H^J\delta_H + \delta_H\delta_H^J + \Lambda d_H^J d_H. \tag{20}$$

De nouveau, nous nous intéressons seulement à $((\Delta_Q - \Delta_Q^{0,0})\alpha, \alpha)$ pour $\alpha \in \mathscr{J}^k = \Omega^k Q \cap \ker \Lambda$. Il nous suffit alors d'exprimer $d_H^J d_H - (d_H^J d_H)^{1,1} = -i(\partial_H^2 - \overline{\partial}_H^2)$ pour obtenir, à l'aide des calculs précédents:

$$((\Delta_Q - \Delta_Q^{0,0})\alpha, \alpha) = (n-k)(n-k+1)(R_1\alpha, \alpha). \tag{21}$$

En ce qui concerne $\Delta_Q^{0,0}$, il découle de la Proposition 7(i), associée aux identités kählériennes (17) que l'on a:

$$\left(\frac{n-k+2}{n-k+1}\right)\Delta_Q^{0,0} = (n-k)\Delta_H^{0,0} + 2(d_Q^{1,0})^* d_Q^{1,0} + 2(d_Q^{0,1})^* d_Q^{0,1}. \tag{22}$$

Il nous reste à exprimer $\Delta_H^{0,0}$ à l'aide de la connexion pseudohermitienne.

Lemma 10 (Formule de Weitzenböck-Tanaka sur $\Omega^{p,q}\Omega$).

$$\Delta_H^{0,0} = \left(1 + \frac{p-q}{n}\right)(\nabla^{0,1})^*\nabla^{0,1} + \left(1 - \frac{p-q}{n}\right)(\nabla^{1,0})^*\nabla^{1,0} + R_2, \tag{23}$$

où on a décomposé ∇ *en* $\nabla^{1,0} = \nabla_{\Pi^{1,0}}$ *et* $\nabla^{0,1} = \nabla_{\Pi^{0,1}}$, *et* R_2, *algébrique, est une "trace" de la courbure pseudohermitienne décrite plus loin.*

Remarque. N. Tanaka démontre une telle expression pour Δ_{∂_H} lorsque $\mathscr{L}_T J = 0$ dans [12, Proposition 12.5]. La preuve est cependant formellement identique dans le cas présent.

Preuve. Reprenons les calculs de la Proposition 2, en cherchant tout d'abord les équivalents géométriques des opérateurs ∂_k et ∂_T qui y sont décrits. Choisissons localement un repère $\{X_k, Y_k = JX_k\}_{1\le k\le n}$ normal en m (cf. preuve de (17)). On pose alors:

$$Z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k - iY_k) \in Q^{1,0}, \qquad Z_{\overline{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k + iY_k) \in Q^{0,1}$$

ainsi que θ^k, $\theta^{\overline{k}}$ la base duale associée.

On note de plus, pour $\alpha = \sum_{I,J} \alpha_{I,J}\theta^I \wedge \theta^{\overline{J}}$

$$e_k\alpha = \theta^k \wedge \alpha \quad \text{et} \quad i_k\alpha = \alpha(Z_k, \cdot),$$

on a en m, $\nabla_{Z_i}\theta^j = 0$ $\forall i, j$. Nous pouvons donc écrire

$$\nabla_{Z_k}\alpha = \sum (Z_k \cdot \alpha_{I,J})\theta^I \wedge \theta^{\overline{J}}.$$

D'autre part, les crochets de Lie en m des vecteurs choisis sont colinéaires à T. Par la formule de Cartan (3), on obtient alors:

$$\partial_H\alpha = \sum (Z_k \cdot \alpha_{I,J})\theta^k \wedge \theta^I \wedge \theta^{\overline{J}} = \sum e_k \nabla_k \alpha.$$

Cette dernière expression, tensorielle en Z_k est alors valable dans un voisinage de m, i.e.,

$$\partial_H \equiv \sum_{k=1}^{n} e_k \nabla_k$$

pour tous les choix de repéres orthonormés Z_k. On en déduit: $\partial_H^* \equiv -\sum \nabla_k^* i_k$. Il est par ailleurs facile de montrer que $(\nabla_k)^* = -\nabla_{\overline{k}}$ en m. On a donc finalement au voisinage de m:

$$\partial_H^* \equiv -\sum i_k \nabla_{\overline{k}}.$$

Enfin, on a en m: $[Z_{\overline{k}}, Z_l] = i\delta_{kl}T$, d'où l'on tire les relations de commutations:

$$\nabla_{\overline{k}}\nabla_l - \nabla_l\nabla_{\overline{k}} - \delta_{kl}\nabla_{iT} = R(Z_{\overline{k}}, Z_l). \tag{24}$$

Nous pouvons maintenant exprimer $\Delta_H^{0,0}$ sur $\Omega^{p,q}Q$. Tout d'abord, on a: $\Delta_H^{0,0} = \Delta_{\partial_H} + \Delta_{\overline{\partial}_H}$ puisque $d_H = \partial_H + \overline{\partial}_H$. En suivant la Proposition 2, on obtient:

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial_H} &= \partial_H\partial_H^* + \partial_H^*\partial_H \\ &\equiv \left(\sum e_k\nabla_k\right)\left(-\sum i_l\nabla_{\overline{l}}\right) - \left(\sum i_l\nabla_{\overline{l}}\right)\left(\sum e_k\nabla_k\right) \\ &= -\sum e_k i_l \nabla_k\nabla_{\overline{l}} - \sum e_l i_k \nabla_{\overline{l}}\nabla_k \quad \text{en } m\end{aligned}$$

avec $i_l e_k + e_k i_l = \delta_{kl}$, d'où

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial_H} &= \sum e_k i_l(\nabla_{\overline{l}}\nabla_k - \nabla_k\nabla_{\overline{l}}) - \sum \nabla_{\overline{k}}\nabla_k \\ &= \sum e_k i_l(\delta_{kl}\nabla_{iT} + R(\overline{l}, k)) - \sum \nabla_{\overline{k}}\nabla_k \\ &= \left(\sum e_k i_k\right)\nabla_{iT} + \sum e_k i_l R(\overline{l}, k) - \sum \nabla_{\overline{k}}\nabla_k\end{aligned}$$

soit:

$$\Delta_{\partial_H} \equiv p\nabla_{iT} + (\nabla^{1,0})^*\nabla^{1,0} + \sum e_k i_l R(\overline{l}, k) \quad \text{(tensoriel)}.$$

On trouve de même

$$\Delta_{\overline{\partial}_H} \equiv -q\nabla_{iT} + (\nabla^{0,1})^*\nabla^{0,1} + \sum e_{\overline{k}} e_{\overline{l}} R(l, \overline{k}).$$

D'autre part, il découle de (22) que l'on a:

$$n\nabla_{iT} = \sum \nabla_{\overline{k}}\nabla_k - \nabla_k\nabla_{\overline{k}} - R(\overline{k}, k) \quad \text{en } m;$$

soit:

$$n\nabla_{iT} \equiv -(\nabla^{1,0})^*\nabla^{1,0} + (\nabla^{0,1})^*\nabla^{0,1} - \sum R(\overline{k}, k). \tag{25}$$

On obtient bien finalement la formule (23) cherchée:

$$\Delta_H^{0,0} = \left(1 + \frac{p-q}{n}\right)(\nabla^{1,0})^*\nabla^{1,0} + \left(1 - \frac{p-q}{n}\right)(\nabla^{0,1})^*\nabla^{0,1} + R_2,$$

avec:

$$(*) \qquad R_2 = \sum_{1\le k,l\le n} (e_k i_l R(\bar l, k) + e_{\bar k} i_{\bar l} R(l, \bar k)) + \frac{p-q}{n} \sum_{1\le k\le n} R(\bar k, k)$$

pour tout repère orthonormé Z_k.

Remarque. R_2 est autoadjoint d'après (23). Pour mieux le voir, on transforme un peu son écriture $(*)$. Notons $R^{1,0}$ et $R^{0,1}$ les deux opérateurs définis sur $Q \otimes \mathbb{C}$ par

$$R^{1,0}V = \sum_{k=1}^{n} R(\bar k, k)\Pi^{1,0}V \quad \text{et} \quad R^{0,1}V = \sum_{k=1}^{n} R(\bar k, k)\Pi^{0,1}V.$$

Par extension, on pose pour $\alpha \in \Omega^k \otimes \mathbb{C}$ et $V_1, \cdots, V_k \in Q$:

$$(R^{1,0}\alpha)(V_1, \cdots, V_k) = -\sum_{i=1}^{k} \alpha(V_1, \cdots, R^{1,0}V_i, \cdots, V_k)$$

et de même $R^{0,1}$. Il est facile de voir, en utilisant la symétrie $R(\bar l, l)k = R(\bar l, k)l$ (cf. [12], [14]), que $i_l R(\bar l, k) = R(\bar l, k) i_l - i_{R(\bar l, l)k}$, et d'autre part: $-\sum_{k,l} e_k i_{R(\bar l, l)k} = R^{1,0}$. En reportant ceci dans $(*)$, on trouve finalement:

$$\begin{aligned} R_2 = &\sum_{k,l} (e_k R(\bar l, k) i_l + e_{\bar k} R(l, \bar k) i_{\bar l}) \\ &+ \left(1 + \frac{q-p}{n}\right) R^{1,0} - \left(1 - \frac{q-p}{n}\right) R^{0,1}. \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le critère d'annulation voulu:

Théorème 11 (Critère d'annulation de $H^k(M, \mathbb{R})$, $k \neq n, n+1$).

$H^k(M, \mathbb{R}) = 0$ $(k < n)$ si on a $\forall \alpha \in \mathcal{J}^k \setminus \{0\}$,

$$((R_2 + (n-k+2)R_1)\alpha, \alpha) > 0.$$

La preuve découle immédiatement de l'application des formules de Weitzenböck (21), (22), et (23) sur une forme harmonique.

En fait, on a $R_2 J\alpha = JR_2\alpha$ et $R_1 J\alpha = -JR_1\alpha$; la condition de positivité obtenue peut donc aussi s'écrire:

$$(R_2\alpha, \alpha) > (n-k+2)|(R_1\alpha, \alpha)| \quad \forall \alpha \in \mathcal{J}^k \setminus \{0\},$$

c'est-à-dire que R_2 doit, en quelque sorte, contrôler R_1.

Essayons d'expliciter cette condition en degré 1. Tout d'abord, on a d'après (19): $R_1 = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_T J$. R_1 mesure donc la déformation suivant le flot de Reeb de la structure complexe et de la métrique (cf. §1). En particulier, $R_1 = 0$ si et seulement si ce flot est riemannian. Quant à R_2, son expression par (26) se simplifie sur les 1-formes α puisqu'on a $\forall l, k \in [1, n]$, $R(\bar{l}, k)i_k\alpha = 0 = R(l, \bar{k})i_{\bar{l}}\alpha$ (R n'agit pas sur les fonctions). On obtient alors sur $\mathscr{J}^1 \simeq \Omega^1 Q$:

$$R_2\alpha = -\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(i\sum_l R(\bar{l}, l)\right) J\alpha = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{l=1}^n R(Y_l, X_l)J\alpha.$$

R_2 peut en fait s'interpréter comme une "courbure de Ricci" suivant le champ de contact. Notons pour cela $\alpha^* \in Q$ le vecteur dual de α, i.e., vérifiant $g(\alpha^*, V) = \alpha(V)$ $\forall V \in Q$. On vérifie alors, en utilisant de nouveau la symétrie $R(\bar{l}, l)k = R(\bar{l}, k)l$ (cf. [12], [14]), la relation:

$$\begin{aligned}\frac{2n}{n-1}(R_2\alpha, \alpha) &= \sum_{i=1}^n K(\alpha^*, X_i) + K(\alpha^*, Y_i)\\ &\quad + K(J(\alpha^*), X_i) + K(J(\alpha^*), Y_i)\\ &= \mathrm{Ricci}_Q(\alpha^*, \alpha^*) + \mathrm{Ricci}_Q(J\alpha^*, J\alpha^*),\end{aligned} \tag{27}$$

où $K(U, V) = (R(V, U)U, V)$ désigne la courbure sectionnelle du plan (U, V).

3. Cas où la torsion R_1 est nulle: flots transversalement kählériens

Nous allons maintenant montrer comment le cas limite du théorème d'annulation $R_2 > 0 = R_1$ peut se retrouver dans le cadre de la géométrie riemannienne. Nous savons que lorsque $R_1 = 0$, la structure complexe, la métrique mais aussi la connexion pseudohermitienne et sa courbure sont invariantes par le flot de T. Il est alors naturel de considérer l'espace $N = M/(T)$ des orbites de ce flot. Afin que N soit muni d'une structure de variété nous supposerons de plus que toutes les orbites sont fermées et de même période. M s'interprète alors comme un fibré en cercles sur la variété kählérienne N. On note π la projection de M sur N. Nous allons identifier les formes d_Q-harmoniques de M grâce à la

Proposition 12. *On a, pour* $k \leq n$:

$$\begin{aligned}\{\alpha \in \mathscr{J}^k,\ \Delta_Q\alpha = 0\} &= \{\alpha \in \Omega^k M,\ \Delta\alpha = 0\}\\ &= \pi^*\{\alpha \in \Lambda^k N,\ \Delta\alpha = \Lambda\alpha = 0\}.\end{aligned}$$

Démonstration. On note respectivement $\mathscr{H}_Q$, $\mathscr{H}_{\text{D.R}}$, et $\pi^*\mathscr{H}_{N,\Lambda}$ ces trois espaces.

On commence par montrer que $\mathscr{H}_Q \subset \mathscr{H}_{\text{D.R}}$ pour $k < n$. L'égalité résulte alors de $\dim \mathscr{H}_Q = \dim \mathscr{H}_{\text{D.R}} = \dim H^k(M, \mathbb{R})$. On sait, grâce aux identités (15), (16), (18), et (20) que $\Delta_H = \Delta_H^{0,0}$ et $\Delta_Q = \Delta_Q^{0,0}$ lorsque $\mathscr{L}_T J = 0 = \operatorname{Tor}(T, \cdot)$. On déduit alors de (22) que $\Delta_Q\alpha = 0$ entraîne $\Delta_H\alpha = 0$. En fait, puisque Δ_H préserve le bidegré, chacune des composantes $\alpha^{p,q} \in \mathscr{J}^{p,q}$ de α est harmonique, i.e., vérifie $d_H\alpha^{p,q} = 0 = \delta_H\alpha^{p,q}$. En décomposant d_H et δ_H, on obtient alors $\partial_H\alpha = \overline{\partial}_H\alpha = \partial_H^*\alpha = \overline{\partial}_H^*\alpha = 0$, i.e., $\Delta_{\partial_H}\alpha = 0 = \Delta_{\overline{\partial}_H}\alpha$. On trouve de plus en reprenant la Proposition (cf. 1re partie): $\Delta_{\partial_H} - \Delta_{\overline{\partial}_H} = i(k-n)\mathscr{L}_T$, d'où finalement $\mathscr{L}_T\alpha = 0$. Il ne reste plus qu'à exprimer d et δ en fonction de d_H et δ_H. On vérifie facilement:

(28) $$d_H = \operatorname{proj}_{\ker i_T} d = d - \theta \wedge i_T d = d - \theta \wedge \mathscr{L}_T$$

et

(29) $$\delta_H = \operatorname{proj}_{\ker i_T} \delta = \delta - \theta \wedge i_T\delta = \delta - \theta \wedge \Lambda,$$

car $i_T\delta + \delta i_T = \Lambda$ est la relation adjointe de $d(\theta \wedge \cdot) + \theta \wedge d = L$. On en tire bien $\delta\alpha = d\alpha = 0$.

En conclusion, on a vu en degré $k < n$ que les formes harmoniques sur M sont dans J^k, i.e., vérifient $i_T\alpha = \Lambda\alpha = 0$ et sont invariantes par le flot de T. Ce sont donc bien les "pullbacks" par π des formes harmoniques primitives de N.

On se place maintenant en degré n et on considère une forme $\alpha \in \mathscr{H}_Q$. Il est bien connu en géométrie riemannienne que les formes harmoniques sont invariantes par les flots riemanniens (cf. Goldberg [4]). Nous allons montrer qu'il en est de même ici, c'est-à-dire $\mathscr{L}_T\alpha = 0$.

En effet, le flot φ_t^T engendré par T est une isométrie, i.e., $(\varphi_t^T)^* = (\varphi_t^T)^{-1} = \varphi_t^{-T}$. Par conséquent, sa dérivée $\mathscr{L}_T = \lim_{t\to 0}(\varphi_t^T - \mathrm{Id})/t$ vérifie $\mathscr{L}_T^* = -\mathscr{L}_T$. On déduit alors de $L\mathscr{L}_T = \mathscr{L}_T L$ que $\Lambda\mathscr{L}_T = \mathscr{L}_T\Lambda$. Comme de plus, $\mathscr{L}_T i_T = i_T\mathscr{L}_T$ $(= i_T d i_T)$, $\mathscr{L}_T$ préserve les espaces $\mathscr{J}^k$ du complexe de contact. D'autre part, on vérifie facilement que $\mathscr{L}_T\alpha$ est Δ_Q-harmonique. Exprimons grâce à (10):

$$\mathscr{L}_T\alpha = i_T D\alpha + d_H\delta_H^J\alpha = d_Q\delta_Q^J\alpha.$$

$\mathscr{L}_T\alpha$ est finalement le représentant harmonique de la classe de d_Q-cohomologie nulle et on a donc bien: $\mathscr{L}_T\alpha = 0$.

Les identités des Propositions 5 et 7 deviennent ici des égalités car elles dépendent des formules élémentaires $\partial_H^2 \simeq \overline{\partial}_H^2 = o(2)$ et $[d_H, \Lambda] \simeq -\delta_H^J$ qui sont ici exactes (cf. (16) et (17)). On a en particulier sur $\mathscr{J}^n$:

$$\begin{aligned}\Delta_Q &= \Delta_Q^{0,0}\\ &= \frac{\Delta_H^2}{4} + \sum_{-1\le k\le 1} ((d_Q\delta_Q)^{k,-k})^*(d_Q\delta_Q)^{k,-k} + ((i_T D)^{k,-k})^*(i_T D)^{k,-k}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\Delta_H \alpha = 0$, d'où par (28) et (29):

$$d\alpha = d_H\alpha + \theta \wedge \mathscr{L}_T\alpha = 0$$

et

$$\delta\alpha = \delta_H\alpha + \theta \wedge \Lambda\alpha = 0,$$

c'est-à-dire $\alpha \in \mathscr{H}_{\mathrm{D.R}}$. On conclut alors de la même façon que lorsque $k < n$.

Nous revenons sur l'interprétation du critère d'annulation. Nous savons dèsormais que $H^1(M, \mathbb{R}) = H^1(N, \mathbb{R})$. Par conséquent, $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ si la courbure de Ricci de N est positive. En fait, cette condition est la même que celle obtenue en utilisant la connexion pseudohermitienne ∇^H et le complexe de contact de M.

En effet, on vérifie que ∇^H est le "pullback" de la connexion ∇^N de Levi-Civita de N i.e., $\nabla^H_X Y \in Q$ $\forall X$ et Y et $\pi\nabla^H_X Y = \nabla^N_{\pi X}\pi Y$. Cela résulte de la caractérisation de ∇^H comme unique connexion préservant $g_{\restriction Q}$, θ et de torsion $\mathrm{Tor}(T, X) = \mathscr{L}_T JX = 0$ ici. On en déduit alors facilement que $\pi R^H(X, Y)Z = R^N(\pi X, \pi Y)\pi Z$. La positivité de Ricci ∇^N est donc équivalente à celle de R_2.

4. Théorème d'annulation pour $H^1(M, R)$ en dimension 3

Nous allons maintenant chercher un critère d'annulation de H^1 en dimension 3 en utilisant de nouveau connexion et complexe de contact. Nous savons déjà que lorsque le flot de T est riemannien et engendre un "bon" quotient, la positivité de R_2 entraîne l'annulation de H^1 (cf. ci-dessus). Il s'agit dans le même esprit qu'en degré $k < n$ de savoir si ce résultat subsiste si $\mathscr{L}_T J$ est "petit" devant R_2. Nous traitons le cas de H^1 en dimension 3 séparément car le laplacien à étudier $\Delta_Q = (d_Q\delta_Q)^2 + D^*D$ est a priori d'ordre 4. En fait, nous avons vu à la fin de la première partie que Δ_Q admet des racines carrées. Plus précisément, l'opérateur

$P = d_Q\delta_Q - *D$ est autoadjoint, vérifie $\Delta_Q = P^2$ et préserve le bidegré modulo des o (cf. Proposition 8).

Exprimons P à l'aide de la connexion pseudohermitienne. Tout d'abord, on obtient en reprenant les formules (10) et (11):

$$P = d_Q\delta_Q + J(i_T D),$$

avec $d_Q\delta_Q = \frac{1}{2}(d_H\delta_H + \delta_H^J d_H^J)$ et $i_T D = \mathscr{L}_T - d_H\delta_H^J$. On développe ensuite ceci suivant les bidegrés pour trouver:

$$P = J\mathscr{L}_T + \Delta_H^{0,0}.$$

$J\mathscr{L}_T$ se décompose à son tour en $(J\mathscr{L}_T)^{0,0} = J\nabla_T$ et

$$\begin{aligned}(J\mathscr{L}_T - (J\mathscr{L}_T)^{0,0})\alpha &= J\alpha(\mathrm{Tor}(T, \cdot)) \quad (\text{cf. } 15)\\ &= -R_1\alpha \quad (\text{cf. } 18).\end{aligned}$$

Quant à $\Delta_H^{0,0}$, les formules (23) et (26) nous donnent:

$$\Delta_H^{0,0} = 2(\nabla^{0,1})^*\nabla^{0,1} \quad \text{sur } \Omega^{1,0}, \quad \text{et} \quad \Delta_H^{0,0} = 2(\nabla^{1,0})^*\nabla^{1,0} \text{ sur } \Omega^{0,1}.$$

Nous avons donc obtenu la formule de Weitzenböck suivante:

$$P = 2\nabla_-^*\nabla_- + J\nabla_T - R_1,$$

où l'on note, pour $\alpha \in \Omega^1 Q \otimes \mathbb{C}$,

$$\nabla_+\alpha = \nabla^{1,0}\alpha^{1,0} + \nabla^{0,1}\alpha^{0,1}$$

et

$$\nabla_-\alpha = \nabla^{1,0}\alpha^{0,1} + \nabla^{0,1}\alpha^{1,0}.$$

Nous transformons un peu cette formule de façon à y faire apparaître la courbure de Ricci: $R_2 = -iR(\overline{1}, 1)J = R(Y_1, X_1)J$. Pour cela, on sait par (25) que

$$J\nabla_T = -\nabla_+^*\nabla_+ + \nabla_-^*\nabla_- - R_2.$$

On obtient alors pour P une famille de formules de Weitzenböck dépendant de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(30)_\lambda \qquad P = (2-\lambda)\nabla_-^*\nabla_- + \lambda\nabla_+^*\nabla_+ + (1+\lambda)J\nabla_T + \lambda R_2 - R_1.$$

Comme on ne peut a priori contrôler le signe $(J\nabla_T\alpha, \alpha)$, cette formule ne fournit pas directement de critère d'annulation, même lorsque $R_2 > 0$ et $R_1 = 0$. Autrement dit, P est toujours un opérateur "sans signe". Cependant, nours avons vu que si $R_1 = 0 = \mathscr{L}_T J$ les formes harmoniques α vérifient $\mathscr{L}_T\alpha = \nabla_T\alpha = 0$. Dans ce cas $(30)_1$ par exemple, nous montre bien que $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ si $R_2 > 0$. Nous voulons adapter cette méthode lorsque $\mathscr{L}_T J \neq 0$. Pour cela nous allons contrôler, pour α harmonique, $J\nabla_T\alpha$ en fonction de $\mathscr{L}_T J$, $\nabla_Q\alpha$, et $\nabla_Q\mathscr{L}_T J$, i.e. une dérivée covariante horizontale de $\mathscr{L}_T J$. Tout d'abord, on a: $0 = i_T D\alpha = \mathscr{L}_T\alpha - d_H\delta_H^J\alpha$ d'où

$$\mathscr{L}_T\alpha = d_Q(\delta_H^J\alpha).$$

On peut alors majorer $\mathscr{L}_T\alpha$ en posant:

$$\begin{aligned}|\mathscr{L}_T\alpha|^2 = |d_Q(\delta_H^J\alpha)|^2 &= (\delta_Q d_Q(\delta_H^J\alpha), \delta_H^J\alpha)\\ &\leq |\delta_H^J\alpha||\delta_Q\mathscr{L}_T\alpha|,\end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned}\delta_Q\mathscr{L}_T\alpha &= [\delta_Q, \mathscr{L}_T]\alpha \quad \text{car } \delta_Q\alpha = 0\\ &= [\delta_Q, \mathscr{L}_T + \mathscr{L}_T^*]\alpha,\end{aligned}$$

puisque $[\delta_Q, \mathscr{L}_T^*] = 0$ comme il découle de $d_Q\mathscr{L}_T = \mathscr{L}_T d_Q$.

On sait de plus que $\mathscr{L}_T = \nabla_T + JR_1$ (cf. plus haut) d'où

$$\mathscr{L}_T^* = -\nabla_T - R_1 J = -\nabla_T + JR_1,$$

et finalement

$$\mathscr{L}_T + \mathscr{L}_T^* = 2JR_1.$$

On a donc

$$\delta_Q\mathscr{L}_T\alpha = 2\delta_Q JR_1\alpha$$

avec: $\delta_Q\beta = (\nabla_{X_1}\beta)(X_1) + (\nabla_{Y_1}\beta)(Y_1)$ pour $\beta \in \Omega^1 Q$ et X_1, $Y_1 = JX_1$ orthonormés; d'où l'on tire: $|\delta_Q\beta| \leq |\nabla_Q\beta|$.

On en déduit:

$$\begin{aligned}|\delta_Q\mathscr{L}_T\alpha| &\leq 2|\nabla_Q JR_1\alpha|\\ &\leq 2(|R_1||\nabla_Q\alpha| + |\nabla_Q R_1||\alpha|) \qquad (\nabla J = 0).\end{aligned}$$

Finalement, on obtient:

$$|\mathscr{L}_T\alpha|^2 \leq 2|\nabla_Q\alpha|(|R_1||\nabla_Q\alpha| + |\nabla_Q R_1||\alpha|),$$

et, sans chercher à optimiser, on trouve

$$|\mathscr{L}_T\alpha| \leq \sqrt{2}(|R_1|^{1/2}|\nabla_Q\alpha| + (|\nabla_Q R_1||\nabla_Q\alpha||\alpha|)^{1/2}),$$

puis, l'estimée voulue de contrôle de $|\nabla_T\alpha| = |(\mathscr{L}_T - JR_1)\alpha|$:

$$|\nabla_T\alpha| \leq |R_1||\alpha| + \sqrt{2}(|R_1|^{1/2}|\nabla_Q\alpha| + (|\nabla_Q R_1||\nabla_Q\alpha||\alpha|)^{1/2}).$$

Nous la substituons dans $(30)_1$ en supposant par homogénéité que $|\alpha| =$

1, on obtient alors:

$$\begin{aligned}(P\alpha, \alpha) &= |\nabla_Q \alpha|^2 + 2(J\nabla_T \alpha, \alpha) + (R_2\alpha, \alpha) - (R_1\alpha, \alpha) \\ &\geq |\nabla_Q \alpha|^2 - 2(|R_1| + \sqrt{2}|R_1|^{1/2}|\nabla_Q \alpha| \\ &\quad + \sqrt{2} + (|\nabla_Q R_1||\nabla_Q \alpha|)^{1/2}) + R_2 - |R_1|.\end{aligned}$$

Nous cherchons une condition portant sur $|R_1|$, $|\nabla_Q R_1|$, et R_2 assurant la positivité de l'expression ci-dessus quel que soit $|\nabla_Q \alpha|$. Nous voulons de plus que celle-ci soit invariante pour des changements de métriques adaptées $g_\theta = \theta^2 + d\theta(\cdot, J\cdot)$ en $g_{k\theta} = k^2\theta^2 + k\,d\theta(\cdot, J\cdot)$; comme l'est celle déjà obtenue pour l'annulation de $H^k(M, \mathbb{R})$ lorsque $k < n$. On voit facilement que sous ces transformations, on a: $|R_1| \to |R_1|/k$, $R_2 \to R_2/k$, $|\nabla_Q R_1| \to |\nabla_Q R_1|/k^{3/2}$, et $|\nabla\alpha|^2 \to |\nabla\alpha|^2/k$ pour α de norme 1.

Nous allons donc chercher une condition du type: $R_2 \gg |R_1|$ et $|\nabla_Q R_1|^{2/3}$. Pour cela, on minore:

$$\begin{aligned}-2(|\nabla_Q R_1||\nabla_Q \alpha|)^{1/2} &= -2(|\nabla_Q R_1|^{2/3}|\nabla_Q R_1|^{1/3}|\nabla_Q \alpha|)^{1/2} \\ &\geq -|\nabla_Q R_1|^{2/3} - |\nabla_Q R_1|^{1/3}|\nabla_Q \alpha|,\end{aligned}$$

et finalement:

$$\begin{aligned}(P\alpha, \alpha) \geq\ & |\nabla_Q \alpha|^2 - \sqrt{2}|\nabla_Q \alpha|(2|R_1|^{1/2} + |\nabla_Q R_1|^{1/3}) \\ & + R_2 - 3|R_1| - \sqrt{2}|\nabla_Q R_1|^{2/3}.\end{aligned}$$

On calcule le discriminant de ce binôme en $|\nabla_Q \alpha|$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 2(2|R_1|^{1/2} + |\nabla_Q R_1|^{1/3})^2 - 4(R_2 - 3|R_1| - \sqrt{2}|\nabla_Q R_1|^{2/3}) \\ &\leq 4(4|R_1| + |\nabla_Q R_1|^{2/3}) - 4(R_2 - 3|R_1| - \sqrt{2}|\nabla_Q R_1|^{2/3}) \\ &= 4(-R_2 + 7|R_1| + (1+\sqrt{2})|\nabla_Q R_1|^{2/3}.\end{aligned}$$

Nous venons donc d'obtenir le

Théorème 13. *Si* $(R_2\alpha, \alpha) > 7|\mathscr{L}_T J| + (1+\sqrt{2})|\nabla_Q \mathscr{L}_T J|^{2/3}$ *pour tout* $\alpha \in \Omega^1 Q$ *de norme* 1, *alors on a* $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$.

5. Courbure riemannienne et courbure pseudohermitienne

On se donne ici une variété M munie d'une structure pseudohermitienne (Q, J, θ). En géométrie riemannienne, on sait que $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ si la courbure de Ricci de la connexion de Levi-Civita est minorée par une constante positive. Nous voulons comparer ce critère d'annulation avec ceux obtenus ci-dessus en géométrie pseudohermitienne.

Tout d'abord, ces derniers sont homogènes dans les changements de métriques adaptées $g_\theta = \theta^2 + d\theta(\cdot, J\cdot)$ en $g_{k\theta} = k^2\theta^2 + k\,d\theta(\cdot, J\cdot)$. Cela signifie que les conditions d'annulation obtenues sont indépendantes de k. En effet, elles s'écrivent:

$$(R_2)_{k_\theta} > K\|\mathscr{L}_{T_k} J\|_{k\theta} \qquad (+K'\|\nabla_Q \mathscr{L}_{T_k} J\|_{k\theta}^{2/3} \text{en dimension 3}),$$

où tous les termes présents sont homogènes de degré -1 en k.

Nous allons voir que la courbure de Ricci de la connexion riemannienne ne possède pas, en général, cette propriété d'homogénéité. En fait, nous exprimerons Ricci $(g_{\lambda\theta})$ comme un polynôme en λ dont les coefficients sont des composantes homogènes de la courbure pseudohermitienne. Pour éviter de changer d'échelle sur le champ de contact, nous travaillons plutôt avec la famille de métriques $g_\lambda = \lambda\theta^2 + d\theta(\cdot, J\cdot)$. Cela revient au même ici puisque Ricci $(g_{\lambda\theta}) = \mathrm{Ricci}(\lambda g_\lambda) = \lambda \,\mathrm{Ricci}\, g_\lambda$.

Dans la suite, λ étant donné, on note ∇^L la connexion de Levi-Civita associée à g_λ et ∇ la connexion pseudohermitienne de g_1. On choisit d'écrire $(X, Y) = g_\lambda(X, Y)$ tandis que $(X, Y)_1 = g_1(X, Y)$. Enfin, on pose $\forall X, Y \in TM$:

$$D(X, Y) = \nabla^L_X Y - \nabla_X Y.$$

Comme ∇ et ∇^L préservent tous deux la métrique g_λ $(\nabla g_\lambda = \nabla\theta^2 + \nabla g_{\restriction Q} = 0$ d'après le §1), ils vérifient la célèbre formule:

$$\begin{aligned} 2(\nabla_X Y, Z) = X.(Y, Z) + Y.(Z, X) - Z.(X, Y) + ([X, Y], Z) \\ + ([Z, X], Y) + ([Z, Y], X) + (\mathrm{Tor}(X, Y), Z) \\ + (\mathrm{Tor}(Z, X), Y) + (\mathrm{Tor}(Z, Y), X), \end{aligned}$$

avec $\mathrm{Tor}\,\nabla^L = 0$ et $\mathrm{Tor}\,\nabla$ donnée dans le paragraphe 1. On obtient par conséquent:

$$\begin{aligned} 2(D(X, Y), Z) = (\mathrm{Tor}\,\nabla(Y, X), Z) + (\mathrm{Tor}\,\nabla(X, Z), Y) \\ + (\mathrm{Tor}\,\nabla(Y, Z), X). \end{aligned}$$

En distinguant les différents cas $X, Y, Z \in Q$ ou $= T$, on en extrait facilement:

$$\begin{aligned} &2\lambda D(X, Y) = (\lambda\, d\theta(Y, X) - 2(\mathrm{Tor}(T, X), Y)_1)T \quad \text{pour } X, Y \in Q, \\ &2D(T, Y) = \lambda JY, \\ &2D(X, T) = 2\,\mathrm{Tor}(T, X) + \lambda JX, \\ &D(T, T) = 0. \end{aligned}$$

Dans la suite, on convient de noter:

$$R_1 X = \mathrm{Tor}(T, X) = -\tfrac{1}{2} J(\mathscr{L}_T J)(X).$$

Nous pouvons maintenant exprimer la courbure sectionnelle de ∇^L: $K_\lambda^L(X, Y) = (R^L(X, Y)Y, X)$ en fonction de la courbure de ∇. On travaille pour simplifier dans un repère $B = \{X_i, Y_i = JX_i, T\}$ normal en $m \in M$, c'est-à-dire vérifiant $\nabla_Y X = 0$ en m $\forall X, Y \in B$ (cf. preuve de (17)). On a alors:

$$\begin{aligned}
K_\lambda^L(X, Y) &= ((\nabla_X^L \nabla_Y^L - \nabla_Y^L \nabla_X^L - \nabla_{[X,Y]}^L)Y, X) \\
&= X.(\nabla_Y^L Y, X) - (\nabla_Y^L Y, \nabla_X^L X) \\
&\quad - Y.(\nabla_X^L Y, X) + (\nabla_X^L Y, \nabla_Y^L X) - (\nabla_{[X,Y]}^L Y, X) \\
&= X.(\nabla_Y Y + D(Y, Y), X) - (D(Y, Y), D(X, X)) \\
&\quad - Y.(\nabla_X Y + D(X, Y), X) + (D(X, Y), D(Y, X)) \\
&\quad - (D([X, Y], Y), X) \\
&= K_\lambda(X, Y) + (\nabla_X D(Y, Y)X) - (\nabla_Y D(X, Y), X) \\
&\quad - (D(Y, Y), D(X, X)) + (D(X, Y), D(Y, X)) \\
&\quad + (D(\mathrm{Tor}(X, Y), Y), X)
\end{aligned}$$

avec $K_\lambda(X, Y) = (R(X, Y)Y, X)$.

On obtient finalement, suivant les différents types de 2-plans considérés:

- Pour $X, Y \in Q$ de norme 1, avec Y orthogonal à X et à JX:

$$K_\lambda^L(X, Y) = K_1(X, Y) - \frac{1}{\lambda}(R_1 X, X)_1 (R_1 Y, Y)_1 + \frac{1}{\lambda}(R_1 X, Y)_1^2.$$

- Pour $X \in Q$ de norme 1,

$$K_\lambda^L(X, JX) = -\frac{3\lambda}{4} + K_1(X, JX) + \frac{1}{\lambda}(R_1 X, X)_1^2 + \frac{1}{\lambda}(R_1 X, JX)_1^2.$$

- Pour $X \in Q$ de norme 1 et $T_\lambda = \lambda^{-1/2} T$ de norme 1,

$$K_\lambda^L(X, T_\lambda) = \frac{\lambda}{4} + (R_1 X, JX)_1 - \frac{1}{\lambda}|R_1 X|_1^2 - \frac{1}{\lambda}((\nabla_T R_1)X, X)_1.$$

(Ici, $K_\lambda(X, T) = (R(X, T)T, X) = 0$ puisque $\nabla T = 0$.)

Pour calculer le tenseur de Ricci, on choisit une base orthonormale $\{X_1, Y_1 = JX_1, \cdots, X_n, Y_n = JX_n, T_\lambda\}$ pour g_λ. On a alors:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ricci}^L_\lambda(T_\lambda, T_\lambda) &= \sum_{i=1}^n K(T_\lambda, X_i) + K(T_\lambda, JX_i)\\ &= \frac{n\lambda}{2} + \sum_{i=1}^n (R_1X_i, JX_i)_1 + (R_1JX_i, J^2X_i)_1\\ &\quad - \frac{1}{\lambda}(|R_1X_i|_1^2 + |R_1JX_i|_1^2 + (\nabla_T R_1X_i, X_i)_1\\ &\qquad + (\nabla_T R_1JX_i, JX_i)_1)\end{aligned}$$

avec:

$$(R_1X, Y)_1 = (R_1Y, X)_1, \qquad R_1J = -JR_1$$

et

$$\sum_{i=1}^n |R_1X_i|_1^2 + |R_1JX_i|_1^2 = \|R_1\|^2 = \tfrac{1}{4}\|\mathscr{L}_T J\|^2,$$

d'où l'on tire finalement

$$\mathrm{Ricci}^L_\lambda(T_\lambda, T_\lambda) = \frac{n\lambda}{2} - \frac{1}{\lambda}\|R_1\|^2. \tag{31}$$

On obtient en particulier que $\mathrm{Ricci}^L_\lambda(T_\lambda, T_\lambda)$ est positif si et seulement si

$$\lambda \geq \sqrt{2/n}\|R_1\| = (1/\sqrt{2n})\|\mathscr{L}_T J\|.$$

Exprimons maintenant

$$\begin{aligned}\mathrm{Ricci}^L_\lambda(X_1, X_1) &= K^L_\lambda(X_1, T_\lambda) + K^L_\lambda(X_1, JX_1)\\ &\quad + \sum_{i=2}^n K^L_\lambda(X_1, JX_i) + K^L_\lambda(X_1, X_i)\\ &= \frac{\lambda}{4} + (R_1X_1, JX_1)_1 - \frac{1}{\lambda}|R_1X_1|_1^2 - \frac{1}{\lambda}(\nabla_T R_1X_1, X_1)_1\\ &\quad - \frac{3\lambda}{4} + K_1(X_1, JX_1) + \frac{1}{\lambda}((R_1X_1, X_1)^2 + (R_1X_1, JX_1)^2\\ &\quad + \sum_{i=2}^n K_1(X_1, X_i) - \frac{1}{\lambda}(R_1X_1, X_1)(R_1X_i, X_i)\\ &\quad + \frac{1}{\lambda}(R_1X_1, X_i)^2 + K_1(X_1, JX_i)\\ &\quad - \frac{1}{\lambda}(R_1X_1, X_1)(R_1JX_i, JX_i) - \frac{1}{\lambda}(R_1X_1, JX_i)^2\\ &= -\frac{\lambda}{2} + \mathrm{Ricci}_1(X_1, X_1) + (R_1X_1, JX_1)\\ &\quad - \frac{1}{\lambda}(\nabla_T R_1X_1, X_1)_1.\end{aligned}$$

Autrement dit, pour $X \in Q$ de norme 1, on a

$$\mathrm{Ricci}_\lambda^L(X, X) = -\frac{\lambda}{2} + \mathrm{Ricci}_1(X, X) + (R_1 X, JX)_1 - \frac{1}{\lambda}((\nabla_T R_1)X, X)_1 .$$

Ce n'est pas fini! Nous voudrions et effet comparer $\mathrm{Ricci}_\lambda^L(X, X)$ au tenseur de Ricci pseudohermitien

$$(R_2 X, X) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Ricci}_Q(X, X) + \mathrm{Ricci}_Q(JX, JX))$$

intervenant dans le critère d'annulation pseudohermitien (cf. paragraphe 2). Nous devons donc identifier

$$\begin{aligned}\mathrm{Ricci}(X, X) - \mathrm{Ricci}(JX, JX) = \sum_{i=2}^{n} & K(X_1, X_i) + K(X_1, JX_i) \\ & - K(JX_1, X_i) - K(JX_1, JX_i).\end{aligned}$$

On calcule, pour $i > 1$,

$$\begin{aligned} K(X_1, X_i) + K(X_1, JX_i) &= (R(X_1, X_i)X_i, X_1) + (R(X_1, JX_i)JX_i, X_1) \\ &= (R(X_1, X_i)JX_i, JX_1) - (R(X_1, JX_i)X_i, JX_1)\end{aligned}$$

car $R(U, V)J = JR(U, V)$ puisque $\nabla J = 0$. Il vient

$$K(X_1, X_i) + K(X_1, JX_i) = (R(X_1, X_i)JX_i + R(JX_i, X_1)X_i, JX_1).$$

On peut utiliser ici l'identité de Bianchi pseudohermitienne (cf. Tanaka [6, Proposition 3.5]):

$$\sum_{\text{cyclique}} R(X_\alpha, X_\beta)X_\gamma = \sum_{\text{cyclique}} d\theta(X_\alpha, X_\beta)R_1 X_\gamma .$$

On obtient alors:

$$K(X_1, X_i) + K(X_1, JX_i) = -(R(X_i, JX_i)X_1, JX_1) - (R_1 X_1, JX_1).$$

On trouve de même:

$$K(JX_1, X_i) + K(JX_1, JX_i) = -(R(X_i, JX_i)X_1, JX_1) + (R_1 X_1, JX_1),$$

d'où l'on tire, pour $X \in Q$ de norme 1:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ricci}(X, X) - \mathrm{Ricci}(JX, JX) &= \sum_{i=2}^{n} -2(R_1 X, JX) \\ &= -2(n-1)(R_1 X, JX)\end{aligned}$$

et finalement:

(32)

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ricci}_\lambda^L(X, X) \\ &\quad = -\frac{\lambda}{2} + (R_2 X, X)_1 + (2-n)(R_1 X, JX)_1 - \frac{1}{\lambda}((\nabla_T R_1)X, X)_1 .\end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant à quelle condition il existe un λ tel que $\mathrm{Ricci}^L_\lambda(X, X) > 0$ pour tout vecteur tangent $X \in TM$. C'est en effet une manière d'obtenir, en géométrie riemannienne, un critère d'annulation de H^1 *homogène* c'est-à-dire invariant par les changements de métriques g_1 en g_λ.

Proposition 14. *Si il existe une constante λ telle que* $\mathrm{Ricci}^L(g_\lambda) > 0$, *alors on a pour tout $X \in Q$ de norme* 1 *et en tout point $m \in M$* :

$$(R_2X, X) > \frac{1}{\sqrt{2n}}\|R_1\|,$$

$$(R_2X, X) > \frac{\sqrt{2}}{1+|2-n|\sqrt{2n}}|((\nabla_T R_1)X, X)|^{1/2},$$

et

$$(R_2X, X) > (4n)^{-2/3}|\mathrm{Tr}_Q(\nabla.R_1)(X)|^{2/3},$$

où

$$\mathrm{Tr}_Q(\nabla.R_1)(X) = \sum_{i=1}^n((\nabla_{X_i}R_1)X, X_i) + ((\nabla_{Y_i}R_1)X, Y_i)$$

désigne la trace de l'endomorphisme $V \mapsto (\nabla_V R_1)X$ restreint à Q.

Démonstration. Nous savons déjà par (31) que si $\mathrm{Ricci}^L_\lambda(T, T) > 0$, alors $\lambda > \sqrt{2/n}\|R_1\|$. D'autre part, en utilisant les symétries

$$(*)\qquad \begin{aligned} (R_2JX, JX) &= (R_2X, X), \\ (R_1JX, J^2X) &= -(R_1X, JX), \\ ((\nabla_T R_1)JX, JX) &= -((\nabla_T R_1)X, X), \end{aligned}$$

on obtient:

$$0 < \mathrm{Ricci}^L_\lambda(X, X) + \mathrm{Ricci}^L_\lambda(JX, JX) = -\lambda + 2(R_2X, X),$$

et par conséquent:

$$2(R_2X, X) > \lambda > \sqrt{2/n}\|R_1\|.$$

Pour qu'il existe un réel λ tel que $\mathrm{Ricci}^L_\lambda(X, X) > 0$, il faut que le trinôme (32) ait un discriminant positif, soit:

$$((R_2X, X) + (2-n)(R_1X, JX))^2 > 2((\nabla_T R_1)X, X).$$

En fait, grâce aux symétries $(*)$, on obtient:

$$\begin{aligned} 2|((\nabla_T R_1)X, X)| &< ((R_2X, X) + |(2-n)(R_1X, JX)|)^2 \\ &< ((R_2X, X) + |2-n|\|R_1\|)^2 \\ &< (1+|2-n|\sqrt{2n})^2(R_2X, X)^2. \end{aligned}$$

Il nous reste à considérer $\mathrm{Ricci}_\lambda^L(Y, Y)$ pour $Y \in TM$ de direction quelconque. On décompose pour cela Y en $X + \alpha T$ où $X \in Q$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ricci}_\lambda^L(Y, Y) &= \mathrm{Tr}(V \mapsto R_\lambda^L(V, Y)Y) \\ &= \mathrm{Ricci}_\lambda^L(X, X) + 2\alpha\,\mathrm{Tr}(V \mapsto R_\lambda^L(V, X)T) \\ &\quad + \alpha^2 \mathrm{Ricci}_\lambda^L(T, T).\end{aligned}$$

Ce trinôme est positif pour tout α si

$$|\mathrm{Tr}(R_\lambda^L(\cdot, X)T)|^2 < \mathrm{Ricci}_\lambda^L(X, X)\mathrm{Ricci}_\lambda^L(T, T).$$

En appliquant cette expression à JX, on obtient à l'aide des formules (32) et (33):

$$|\mathrm{Tr}(R_\lambda^L(\cdot, X)T|^2 + |\mathrm{Tr}(R_\lambda^L(\cdot, JX)T)|^2 < (-\lambda + 2(R_2X, X))(n\lambda^2/2 - \|R_1\|^2),$$

avec

$$2(R_2X, X) - \lambda = \mathrm{Ricci}_\lambda^L(X, X) + \mathrm{Ricci}_\lambda^L(JX, JX) > 0,$$

d'où

$$|\mathrm{Tr}(R_\lambda^L(\cdot, X)T)|^2 + |\mathrm{Tr}(R_\lambda^L(\cdot, JX)T)|^2 < 4n(R_2X, X)^3.$$

Enfin, en utilisant l'expression de ∇^L en fonction de ∇ obtenue plus haut, on trouve facilement:

$$(R_\lambda^L(V, X)T, V) = (\nabla_V R_1(X), V) - (\nabla_X R_1(V), V),$$

puis en sommant:

$$\mathrm{Tr}(R_\lambda^L(\cdot, X)T) = \mathrm{Tr}(\nabla.R_1(X)) = \mathrm{Tr}_Q(\nabla.R_1(X)),$$

puisque

$$(\nabla R_1)JV = -J(\nabla R_1)V \quad \text{et} \quad ((\nabla_T R_1)X, T) = 0. \quad \text{q.e.d.}$$

En conclusion, nous voyons que la positivité de la courbure de Ricci riemannienne implique le contrôle de R_1 $(= \frac{1}{2}\mathscr{L}_T J)$, $\mathrm{Tr}_Q(\nabla.R_1)$, et $\nabla_T R_1$ par R_2. En revanche, le critère d'annulation de H^1 obtenu grâce au complexe de contact en dimension ≥ 5 nécessite seulement le contrôle de R_1 par R_2.

Pour expliquer ceci, on considère l'ordre des différents éléments de courbures mis en jeu, c'està dire le nombre maximum de dérivations suivant Q de la métrique et de la structure complexe qu'ils effectuent. En ce sens R_2, R_1, $\mathrm{Tr}_Q(\nabla.R_1)$, et $\nabla_T R_1$ sont respectivement de poids 2, 2, 3, et 4.

En fait, ce sont des composantes de courbure homogènes car on a, lorsque $g_\theta \mapsto g_{k^2\theta}$:

$$\|R_2\|, \|R_1\|, \|\mathrm{Tr}_Q(\nabla.R_1)\|, \|\nabla_T R_1\| \\ \mapsto \lambda^{-2}\|R_2\|, \lambda^{-2}\|R_1\|, \lambda^{-3}\|\mathrm{Tr}_Q(\nabla.R_1)\|, \lambda^{-4}\|\nabla_T R_1\|.$$

En géométrie pseudohermitienne, nous avons pu utiliser le laplacien de contact Δ_Q d'ordre 2 en dérivées suivant Q. Le laplacien de Hodge–De Rham est lui de poids 4, car il utilise des dérivées secondes des formes suivant T, vecteur transverse d'ordre 2. Les formules de Weitzenböck associées font alors naturellement intervenir des éléments de courbure d'ordre au plus 2 pour Δ_Q et, en géométrie riemannienne, la courbure de Ricci, d'ordre 4 comme nous venons de le voir.

Dans le cas des 1-formes en dimension 3, nous ne pouvions pas employer directement la racine, carrée, d'ordre 2, du laplacien de contact, pour obtenir un critère d'annulation. Celle-ci est en effet toujours un opérateur sans signe. Nous avons cependant conclu en étudiant des opérateurs supplémentaires, $\delta_Q\mathscr{L}_T$ et $\mathscr{L}_T\delta_Q$, d'ordre 3. Il n'est donc pas étonnant que la condition d'annulation trouvée nécessite le contrôle d'une composante de courbure d'ordre 3: $\nabla_Q R_1$. Cela reste cependant "meilleur" que la condition d'ordre 4 intervenant en géométrie riemannienne.

6. Géodésiques de Carnot-Carathéodory et courbure pseudohermitienne

En géométrie riemannienne, on peut retrouver un critère d'annulation de $H^1(M, \mathbb{R})$ en étudiant les géodésiques. Le théorème de Myers affirme en effet que toute variété à courbure de Ricci minorée par une constante strictement positive est compacte. On en déduit qu'une telle variété, ayant son revêtement universel borné, possède un groupe fondamental fini, et qu'en particulier $H^1(M, \mathbb{R}) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]\otimes\mathbb{R} = 0$. On peut se demander s'il existe un équivalent d'une telle méthode en géométrie pseudohermitienne.

Comme dans tout ce qui précède, nous cherchons à étudier des objets invariants dans les changements de métriques adaptées g_θ en $g_{k\theta}$. Les géodésiques riemanniennes ne possèdent pas cette propriété. En remplacement, il est assez naturel de considérer les *géodésiques de Carnot-Carathéodory*. On rappelle que la *distance* de *Carnot-Carathéodory* entre deux points M_1 et M_2 se définit comme le minimum des longueurs des chemins legendriens, c'est-à-dire partout tangents à Q, reliant M_1 à M_2.

Les courbes localement minimisantes pour cette distance s'appelent les géodésiques de Carnot-Carathéodory. Leur équation locale a été calculée par de nombreux auteurs, voir par exemple Strichartz [11].

Nous voulons dans un premier temps établir leur équation locale en fonction de la connexion pseudohermitienne. Pour cela, nous devons faire un calcul de variation. Soit $\gamma_u(t)$, $u, t \in [O, 1]$ une famille de courbes legendriennes reliant $M_0 = \gamma_u(O)$ à $M_1 = \gamma_u(1)$. On note $V = \partial\gamma/\partial u$ et $X = \partial\gamma/\partial t$. On étudie de préférence la fonctionnelle énergie

$$E(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|^2 \, dt$$

à la longueur

$$l(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\| \, dt.$$

Les minimas de E sont bien ceux de l au paramètre près. Exprimons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} E(\gamma_u)|_{u=0} &= V.\int_0^1 (X, X)\, dt \\
&= 2\int_0^1 (\nabla_V X, X)\, dt \\
&= 2\int_0^1 (\nabla_X V + (\mathrm{Tor}(V, X), X))\, dt \\
&= 2\int_0^1 X.(V, X) - (V, \nabla_X X) + (\mathrm{Tor}(V, X), X)\, dt \\
&= 2\int_0^1 -(V, \nabla_X X) + (\mathrm{Tor}(V, X), X)\, dt
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Tor}(V, X), X) &= \mathrm{Tor}(\theta(V)T + V_Q, X) \\
&= \theta(V)\mathrm{Tor}(T, X) + d\theta(V_Q, X)T
\end{aligned}$$

(cf. paragraphe 1), d'où

$$(\mathrm{Tor}(V, X), X) = \theta(V)(\mathrm{Tor}(T, X), T).$$

On retrouve bien que $E(\gamma)$ est minimum parmi les reparamétrages de γ si et seulement si

$$(\nabla_X X, X) = 0 = X.\|\dot\gamma(t)\|^2,$$

ce que nous supposerons satisfait désormais. On décompose alors

$$\nabla_X X = \alpha(t) JX + Y,$$

où Y est orthogonal à X et à JX. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial u}E(\gamma_u)|_{u=0} = 2\int_0^1 -\alpha(t)(V, JX) + (V, Y) + \theta(V)(\mathrm{Tor}(T, X), X)\,dt.$$

Il nous reste à exprimer le fait que γ_u est une famille de courbes legendriennes, soit

$$\begin{aligned} d\theta(V, X) &= V.\theta(X) - X.\theta(V) - \theta([V, X]) \\ &= X.\theta(V) = -(V, JX), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}E(\gamma_u)|_{u=0} &= 2\int_0^1 -\alpha(t)(X.\theta(V)) + (V, Y) + \theta(V)(\mathrm{Tor}(T, X), X)\,dt \\ &= 2\int_0^1 \theta(V)(X.\alpha(t) + (\mathrm{Tor}(T, X), X)) + (V, Y)\,dt. \end{aligned}$$

Inversement, on vérifie que, lorsque γ n'est pas constante, tout champ de vecteurs V le long de γ, nul aux extrémités, satisfaisant

$$X.\theta(V) = (V, JX)$$

s'intègre en une famille de courbes legendriennes à extrémités fixées. Par conséquent, $E(\gamma)$ est stationnaire si et seulement si

$$Y = 0, \quad \text{et} \quad X.\alpha(t) + (\mathrm{Tor}(T, X), X) = 0.$$

Proposition 15 (Equation des géodésiques de Carnot-Carathéodory). *Soit γ une courbe legendrienne, et $X = \dot\gamma(t)$. Alors γ est une géodésique de Carnot-Carathéodory si et seulement si $\nabla_X X$ est colinéaire à JX,*

$$\nabla_X X = -\alpha JX,$$

où

$$X.\alpha(t) = -(\mathrm{Tor}(T, X), X) = \tfrac{1}{2}(J(\mathscr{L}_T J)X, X).$$

Nous pouvons interpréter cette équation dans le cas de notre modèle métrique: le groupe d'Heisenberg. On munit H^3 de sa structure pseudo-hermitienne invariante par translations. La projection $\pi: H^3 \to H^3/\langle T\rangle = \mathbb{R}^2$ euclidien est une submersion riemannienne, c'est-à-dire qu'elle conserve la norme des vecteurs horizontaux. Enfin, θ se projette suivant la forme d'aire $A = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$. Par conséquent, un lacet fermé de $\mathbb{R}^2$ se relève en un lacet legendrien fermé si et seulement si son aire est nulle. De même, les chemins legendriens reliant M_1 et $M_2 \in H^3$ sont les relevés des courbes d'extrémités πM_1, πM_2 et d'aire balayée fixée. Les géodésiques de Carnot-Carathéodory sont alors les courbes de longueur minimale pour une aire fixée, c'est-à-dire les arcs de cercles. En projection, leur vecteur tangent $X = \dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|$ vérifie $\nabla_X X = kJX$ où k est la courbure du cercle décrit et ∇ la connexion de Levi-Civita de $\mathbb{R}^2$. Comme on sait qu'ici la connexion pseudohermitienne se projette sur ∇ (cf. paragraphe 2), on retrouve bien comme équations des géodésiques de Carnot-Carathéodory $\nabla_X X = kJX$ avec $X.k = -(\mathrm{Tor}(T, X), X) = 0$ puisque la structure complexe est invariante par T.

En suivant la démonstration du théorème de Myers en géométrie riemannienne, nous voulons maintenant exprimer la variation seconde de longueur au voisinage d'une géodésique de Carnot-Carathéodory. Ceci doit nous permettre, sous une hypothèse de courbure, de montrer que les géodésiques de grande longueur ne sont pas globalement minimisantes.

Pour limiter les calculs nécessaires, nous nous plaçons dans la suite en dimension 3. On se donne de nouveau une famille de courbes legendriennes $\gamma_u(t)$ reliant $M_0 = \gamma_u(O)$ à $M_1 = \gamma_u(1)$. On suppose de plus que γ_0 est une géodésique de Carnot-Caratheodory et, pour avoir $E(\gamma_u) = l(\gamma_u)^2$, que les γ_u sont paramétrées à vitesse constante. On a alors, pour $u = 0$,

$$\nabla_X X = \alpha(t)JX \quad \text{avec } \alpha'(t) = -(\mathrm{Tor}(T, X), X).$$

Déterminons pour commencer les contraintes imposées sur $V_{\restriction u=0}$. On pose $V = a(t)X + b(t)JX + c(t)T$. On sait déjà que V est une variation de courbes legendriennes si

$$d\theta(V, X) = -X.\theta(V) = -c'(t) = -(V, JX) = -b(t).$$

D'autre part, on veut que les γ_u soient paramétrées à vitesse constante, i.e.,

$$V.X.(X, X) = 0 = X.V.(X, X)$$

soit, pour $u = 0$,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}V.(X, X) &= \text{constante} = (\nabla_V X, X) = (\nabla_X V + \mathrm{Tor}(V, X), X)\\ &= (\nabla_X V, X) + \theta(V)(\mathrm{Tor}(T, X), X),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\nabla_X V &= \nabla_X(a(t)X + b(t)JX + c(t)T)\\ &= (a'(t) - b(t)\alpha(t))X + (b'(t) + a(t)\alpha(t))JX + c'(t)T,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\text{constante} = a'(t) - c'(t)\alpha(t) - c(t)\alpha'(t) = (a(t) - c(t)\alpha(t))',$$

et comme $V(0) = 0 = V(1)$, on a $a(t) = c(t)\alpha(t)$. En résumé les champs $V_{\restriction u=0}$ possibles sont de la forme:

$$V = c(t)\alpha(t)X + c'(t)JX + c(t)T, \tag{33}$$

et ne dépendent que du choix d'une seule fonction arbitraire $c(t) = \theta(V)$.

On veut maintenant calculer

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u^2}E(\gamma_u) = 2l(\gamma_u)\frac{\partial^2}{\partial u^2}l(\gamma_u) &= V^2\int_0^l (X, X)\,dt \\ &= 2\int_0^l V.(\nabla_V X, X)\,dt = 2\int_0^l V.(\nabla_X V + \mathrm{Tor}(V, X), X)\,dt \\ &= 2\int_0^l V.X.(V, X) - V.(V, \nabla_X V) + V.(\mathrm{Tor}(V, X), X)\,dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u^2}E(\gamma_u) = 2\int_0^l & X.V.(V, X) - (\nabla_V V, \nabla_X X) + (V, \nabla_V\nabla_X X) \\ & + ((\nabla_V \mathrm{Tor})(V, X), X) + (\mathrm{Tor}(\nabla_V V, X), X) \\ & + (\mathrm{Tor}(V, \nabla_V X), X)\,dt.\end{aligned} \tag{34}$$

On s'occupe tout d'abord des termes

$$\begin{aligned}-(\nabla_V V, \nabla_X X) + (\mathrm{Tor}(\nabla_V V, X), X) &= -\alpha(t)(\nabla_V V, JX) \\ &\quad + \theta(\nabla_V V)(\mathrm{Tor}(T, X), X) \\ &= -\alpha(t)(\nabla_V V, JX) \\ &\quad - (V.\theta(V))\alpha'(t)\end{aligned}$$

avec

$$X.(V, \theta(V)) = V.(X.\theta(V)) = V.(V, JX) = (\nabla_V V, JX) + (V, J\nabla_V X),$$

d'où

$$\begin{aligned}&\int_0^l -(\nabla_V V, \nabla_X X) + (\mathrm{Tor}(\nabla_V V, X), X) \\ &\quad = \int_0^l -(\alpha(t)V.\theta(V))' + \alpha(t)(V, J\nabla_V X)\,dt \\ &\quad = -\int_0^l \alpha(t)(JV, \nabla_X V + \mathrm{Tor}(V, X))\,dt \\ &\quad = -\int_0^l \alpha(t)(JV, \nabla_X V) + \alpha(t)\theta(V)(JV, \mathrm{Tor}(TX))\,dt.\end{aligned}$$

Avec les mêmes méthodes, on obtient pour les autres termes de (34)

$$(\mathrm{Tor}(V, \nabla_V X), X) = \theta(V)(\mathrm{Tor}(T, X)\nabla_X V) + \theta(V)^2|\mathrm{Tor}(T, X)|^2,$$

$$\begin{aligned}((\nabla_V \mathrm{Tor})(V, X), X) = \theta(V)^2((\nabla_T R_1)X, X) &+ \theta(V)^2\alpha(t)((\nabla_X R_1)X, X) \\ &+ \theta(V)\theta'(V)((\nabla_{JX} R_1)X, X),\end{aligned}$$

où on note $R_1 X = \mathrm{Tor}(T, X) = -\frac{1}{2}J(\mathscr{L}_T J)(X)$.

Enfin,

$$\int_0^l (V, \nabla_V \nabla_X X)\, dt = \int_0^l |\nabla_X V|^2 - (X, \theta(V))^2 + \theta(V)(\nabla_X V, \operatorname{Tor}(T, X)) - (V, R(V, X)X)\, dt$$

avec

$$(V, R(V, X)X) = \theta(V)\theta'(V)(R(T, X)X, JX) + \theta'(V)^2(R(JX, X)X, JX),$$

où $(R(JX, X)X, JX) = -(R_2 X, X)$ est la courbure de Ricci pseudohermitienne déjà rencontrée. Pour reconnaître $(R(T, X)X, JX)$, on se sert de l'identité de Bianchi pseudohermitienne (cf. Lee [8], Webster[14]):

$$R(T, X)X + R(T, JX)JX = (\nabla_X R_1)(X) + (\nabla_{JX} R_1)(JX),$$

d'où

$$(R(T, X)X, JX) = (\nabla_X R_1 X, JX) - (\nabla_{JX} R_1 X, X).$$

En reportant tout ceci dans (34), on obtient finalement

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u^2} E(\gamma_u) = \int_0^l & c''^2 + 2cc''(R_1 X, JX) - c'^2((R_2 X, X) + \alpha^2) \\ & + cc'(\alpha(R_1 X, X) + 2(\nabla_{JX} R_1 X, X) - (\nabla_X R_1 X, X)) \\ & + c^2((R_1 X, JX)^2 + 2\alpha^2(R_1 X, JX) + (\nabla_T R_1 X, X) \\ & + \alpha(\nabla_X R_1 X, X))\, dt\end{aligned} \tag{35}$$

où $\alpha(t) = (\nabla_X X, JX)$ est la "courbure" de la géodésique, et $c(t) = \theta(V)$ est la fonction déterminant la variation de courbes (cf. (33)). Les seules contraintes sur $c(t)$ sont $c(0) = c(l) = 0 = c'(0) = c'(l)$.

Sur le groupe de Heisenberg, l'expression se simplifie en

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} E(\gamma_u) = \int_0^l c''^2 - c'^2 \alpha^2\, dt.$$

Pour $c(t) = 1 - \cos(2\pi t/l)$, on obtient que $\partial^2 E(\gamma_u)/\partial u^2$ est strictement négatif si $l > 2\pi/\alpha$. Ceci traduit le fait que les géodésiques très courbées ne sont pas minimisantes même sur de petites longueurs (cf. l'interprétation en termes d'aire ci-dessus). Il en sera de même sur toute variété de contact, le terme en $\int_0^l -c'^2\alpha^2\, dt$ de l'expression (35) devenant dominant sur les géodésiques à forte courbure. Pour contrôler l'ensemble des géodésiques, il nous faut une hypothèse de positivité sur $(R_2 X, X)$.

En fait, on veut que ce terme domine tous les autres dans l'intégrale (35) car ceux-ci changent de signe lorsque X est changé en JX. Enfin, il faut une hypothèse garantissant que deux points quelconques sont reliés par une géodésique. On dit qu'une structure pseudohermitienne est *complète* si la distance de Carnot-Carathéodory est complète. D'après Strichartz [11], il revient au même de supposer que la connection pseudohermitienne est géodésiquement complète.

Théorème 16 (Version pseudohermitienne du théorème de Myers en dimension 3). *Soit M une variété de dimension 3 munie d'une structure pseudohermitienne complète telle que, pour tout vecteur $X \in Q$ de norme 1,*

$$(R_2 X, X) > \max\{2^{10}\|R_1\|, 2^{16/3}\|\nabla_Q R_1\|^{2/3}, 2^{9/2}\|\nabla_T R_1\|^{1/2}\},$$

alors M est compacte de diamètre pour la métrique de Carnot-Carathéodory

$$D \leq D_0 = \frac{4\sqrt{2}\pi}{\min\{(R_2 X, X)(R_2 X, X)^{1/2} | X \in Q, \ \|X\| = 1\}}.$$

Démonstration. Il est bien connu que deux points quelconques sont toujours reliés par une géodésique de Carnot-Carathéodory (cf. Strichartz [11]). Pour obtenir le résultat, il nous suffit donc de montrer que toute géodésique de longueur supérieure à D_0 admet un champ de variation V tel que $V^2.l(\gamma) < 0$.

On essaye comme ci-dessus $V = c(t)\alpha(t)X + c'(t)JX + c(t)T$ (cf. (33)) avec $c(t) = 1 - \cos(2\pi t/l)$. On trouve, sans chercher à optimiser les coefficients

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial u^2} E(\gamma_u) \leq \int_0^l & c''^2 + 2|cc''|\|R_1\| - c'^2((R_2 X, X) + \alpha^2) \\
& + |cc'|(|\alpha|\|R_1\| + 2\|\nabla_Q R_1\|) \\
& + c^2(\|R_1\|^2 + 2\alpha^2\|R_1\| + \|\nabla_T R_1\| + |\alpha|\|\nabla_Q R_1\|)\, dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial u^2} l(\gamma_u) \leq & \frac{8\pi^4}{l^3} + \frac{8\pi^2}{l}\|R_1\| - \frac{2\pi^2}{l}((R_2 X, X) + \alpha^2) \\
& + 2\pi(|\alpha|\|R_1\| + 2\|\nabla_Q R_1\|) \\
& + 4l(\|R_1\|^2 + 2\alpha^2\|R_1\| + \|\nabla_T R_1\| + |\alpha|\|\nabla_Q R_1\|)\, dt.
\end{aligned}$$

Cette expression est négative si $\frac{1}{8}(2\pi^2/l^2)((R_2 X, X) + \alpha^2)$ domine séparément chacun des huit autres termes pour tout α. Cela se traduit par les inégalités suivantes:

$$l^2 > \frac{32\pi^2}{(R_2X\,,\,X)}\,, \qquad 32\|R_1\| < (R_2X\,,\,X)\,,$$

$$l < \frac{\pi}{4}\frac{(R_2X\,,\,X)^{1/2}}{\|R_1\|} \qquad \left(= \frac{\pi}{8}\min_\alpha \frac{(R_2X\,,\,X)+\alpha^2}{|\alpha|\|R_1\|}\right)\,,$$

$$l < \frac{\pi}{16}\frac{(R_2X\,,\,X)}{\|\nabla_Q R_1\|}\,, \qquad l^2 < \frac{\pi^2}{16}\frac{(R_2X\,,\,X)}{\|R_1\|^2}\,,$$

$$l^2 < \frac{\pi^2}{32\|R_1\|} \qquad \left(= \frac{\pi^2}{32}\min_\alpha \frac{(R_2X\,,\,X)+\alpha^2}{\alpha^2\|R_1\|}\right)\,,$$

$$l^2 < \frac{\pi^2}{16}\frac{(R_2X\,,\,X)}{\|\nabla_Q R_1\|}\,,$$

$$\text{et} \quad l^2 < \frac{\pi^2}{8}\frac{(R_2X\,,\,X)^{1/2}}{\|\nabla_Q R_1\|} \qquad \left(= \frac{\pi^2}{16}\min_\alpha \frac{(R_2X\,,\,X)+\alpha^2}{|\alpha|\|\nabla_Q R_1\|}\right)\,.$$

L'existence d'un l vérifiant toutes ces conditions est assurée sous les hypothèses de courbure faites, et on peut prendre alors $l = D_0$.

Remarque. Comparaison avec le résultat riemannien.

Nous avons vu au paragraphe 4, Proposition 14, que s'il existe un λ tel que la courbure de Ricci de la métrique $g_{\lambda\theta}$ soit positive, alors R_2 contrôle R_1, $\mathrm{Tr}_Q(\nabla R_1)$, et $\nabla_T R_1$. Les éléments de courbure mis en jeu sont donc du même ordre que ceux impliqués ci-dessus dans la version pseudohermitienne du théorème de Myers. Pour cette approche utilisant les géodésiques, les métriques riemanniennes et celles de Carnot-Carathéodory conduisent à des conditions d'annulation sensiblement équivalentes.

Références

[1] G. De Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.

[2] G. B. Folland & J. J. Kohn, *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex*, Annals. of Math. Studies, No. 75, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1972.

[3] G. B. Folland & E. M. Stein, *Estimates for the $\overline{\partial}_b$-complex and analysis on the Heisenberg groups*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974) 429–452.

[4] S. I. Goldberg, *Curvature and homology*, Academic Press, New York, 1962.

[5] B. Helffer & J. Nourrigat, *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, Progr. Math., No. 58, Birkhäuser, Boston, 1986.

[6] P. Julg, *K-théorie des C^*-algèbres associées à certains groupes hyperboliques*, Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. Strasbourg I, 1991.

[7] P. Julg & G. Kasparov, *L'anneau $KK_G(\mathbb{C}\,,\,\mathbb{C})$ pour $G = SU(n\,,\,1)$*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **313** (1991) 259–264.

[8] J. M. Lee, *The Fefferman metric and pseudohermitian invariants*, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986) 411–429.

[9] L. P.Rothschild & E. M. Stein, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1976) 247–320 .

[10] M. Rumin, *Un complexe de formes différentielles sur les variétés de contact*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **310** (1990) 401–404 .

[11] R. S. Strichartz, *Sub-riemannian geometry*, J. Differential Geometry **24** (1986) 221–263 .

[12] N. Tanaka, *A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds*, Lectures in Math., Vol. 9, Kyoto University, 1975.

[13] S. Tanno, *Variational problems on contact Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989) 349–379 .

[14] S. M. Webster, *Pseudohermitian structures on a real hypersurface*, J. Differential Geometry **13** (1978) 25–41 .

[15] A. Weil, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1958.

[16] A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, ORSAY